

AVEC NOS ÉLÈVES

Calculons la masse de la Terre et de la Lune

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Voici une petite application qui permet de calculer la masse de la Terre et de la Lune, à partir de la troisième loi de Kepler et de la loi du pendule simple.

Masse Terre+Lune

La troisième loi de Kepler, revue par Newton, relie la période de révolution P et le demi-grand axe a de l'orbite elliptique d'un satellite de masse m en orbite autour d'un astre de masse M . La relation précise est la suivante :

$$\frac{a^3}{P^2} = G \frac{M + m}{4\pi^2}$$

G est la constante de gravitation mesurée en laboratoire (expérience de Cavendish). La valeur est $G = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I.¹. L'application à la Lune (Rayon de l'orbite $a = 384\,400$ km et période sidérale $P = 27,3215$ jours) tournant autour de la Terre, conduit directement à l'estimation de la masse Terre + Lune :

$$M + m = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}$$

L'application numérique conduit à :

$$M + m = \frac{39,4784}{6,67 \times 10^{-11}} \frac{(384,4 \times 10^6)^3}{(27,3215 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

Soit :

$$M + m = 6,03 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Masse de la Terre

On considère un pendule simple de longueur L . La période T est donnée par la relation suivante :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

¹ S.I. système international d'unités ; les longueurs sont en mètre, les masses en kilogramme, les forces en Newton, le temps en seconde.

g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre (à la distance R du centre). Son expression tirée de la loi de Newton est :

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

D'où :

$$M = \frac{4\pi^2 R^2 L}{GT^2}$$

J'ai effectué la mesure avec un pendule de longueur 45,5 centimètres. Pour de petites amplitudes, on mesure 50 oscillations. On trouve respectivement 67,59s et 67,84s. Ce qui conduit aux estimations de la période :

$$T = 1,3518 \text{ s et } T = 1,3568 \text{ s.}$$

Soit une moyenne de : $1,3543 \pm 0,0025$ s.

On trouve alors la masse de la Terre :

$$M = \frac{39,4784 \times 4,0577 \times 10^{13} \times 0,455}{6,67 \times 10^{-11} \times 1,8341}$$

Soit, pour la masse de la Terre :

$$M = 5,96 \pm 0,02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Masse de la Lune

Nous en concluons que la masse de la Lune est égale à :

$$m = (6,03 - 5,96) \times 10^{24} = 7,00 \pm 2 \times 10^{22} \text{ kg.}$$

Les valeurs admises sont :

Masse de la Terre : $M = 5,976 \times 10^{24}$ kg

Masse de la Lune : $m = 7,349 \times 10^{22}$ kg