Télémètre Thalès

Daniel Pascal

Résumé : *Le télémètre dont il est question ici, s'appuie sur la notion de triangles semblables, et ne fait pas intervenir la notion d'angle. Son principe peut être compris même par les plus jeunes élèves du collège. Mais les procédures de réglages et d'étalonnage peuvent exciter la sagacité des élèves de Terminales. Il est construit avec des composants de récupération et un petit télescope (Newton 114/900). Ses composants-clés sont une butée micrométrique de palmer et un réglet.*

Introduction

Un **télémètre** est un instrument qui permet de mesurer la distance séparant un observateur d'un point éloigné, par des procédés le plus souvent optiques. C'est un nom masculin, composé du préfixe "télé" provenant du grec ancien et signifiant : "à distance", et de la racine "mètre" provenant aussi du grec ancien et signifiant ici "instrument qui sert à mesurer".

Thalès de Millet était un géomètre Grec qui vivait au VI^{e} siècle avant notre ère, à l'époque de l'éclosion de la pensée scientifique dans le pourtour méditerranéen. Il a vécu à Millet et il est considéré comme l'un des sept Sages de la Grèce antique. Il a beaucoup voyagé, s'est occupé d'astronomie et il est le premier mathématicien de l'histoire reconnu comme tel. Il aurait eu Pythagore comme élève vers la fin de sa vie.

Alors qu'il était à Alexandrie, en Egypte (au bord de la Méditerranée, dans le delta du Nil) où était la plus prestigieuse bibliothèque du monde, sa renommée était si grande que le pharaon Amasis demanda à le rencontrer. Pour tester son savoir, le pharaon lui demanda s'il pouvait dire la hauteur de la grande pyramide de Khéops. Cette hauteur était connue des prêtres égyptiens (et du pharaon, bien sûr) mais était gardée secrète pour les gens du peuple, et aussi pour les étrangers (comme Thalès, qui était Grec).

Thalès répondit : "Je vais le demander à votre père", ce qui était à la limite de l'impertinence ; en effet, on ne s'adresse pas à un pharaon, on se contente de lui répondre, s'il vous questionne. Le fait que le père du pharaon soit mort, n'était pas un problème : à cette époque, on conversait avec les défunts sans problème ! La subtilité de Thalès résidait dans le fait que le pharaon se prenait aussi pour le fils du soleil et que c'est à celui-ci que Thalès comptait s'adresser, comme nous allons le voir par la suite.

La racine des mots

La racine "mètre" a parfois le sens de : "ce qui se mesure", comme dans "micromètre", où "micro" signifie "très petit". Un micromètre est une unité de mesure valant un millième de millimètre, c'est-à-dire un millionième de mètre.

Beaucoup de mots sont formés d'"un préfixe et d'"une racine. Par exemple :

"télécommande" : "appareil qui permet de commander à distance".

"télescope" : "appareil qui permet de voir loin". ("scope" provient d'"un mot grec signifiant "voir").

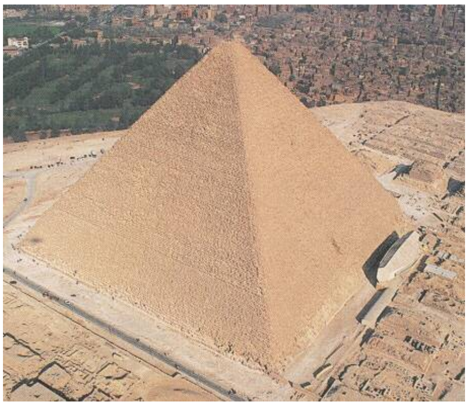
"microscope" : "appareil qui permet de voir ce qui est très petit".

"thermomètre" : "appareil qui permet de mesurer la température".

"chronomètre" : "appareil qui permet de mesurer le temps". (Chronos était le dieu du temps chez les Grecs).

"goniomètre" : "appareil qui permet de mesurer les angles". (Un hexagone a six angles).

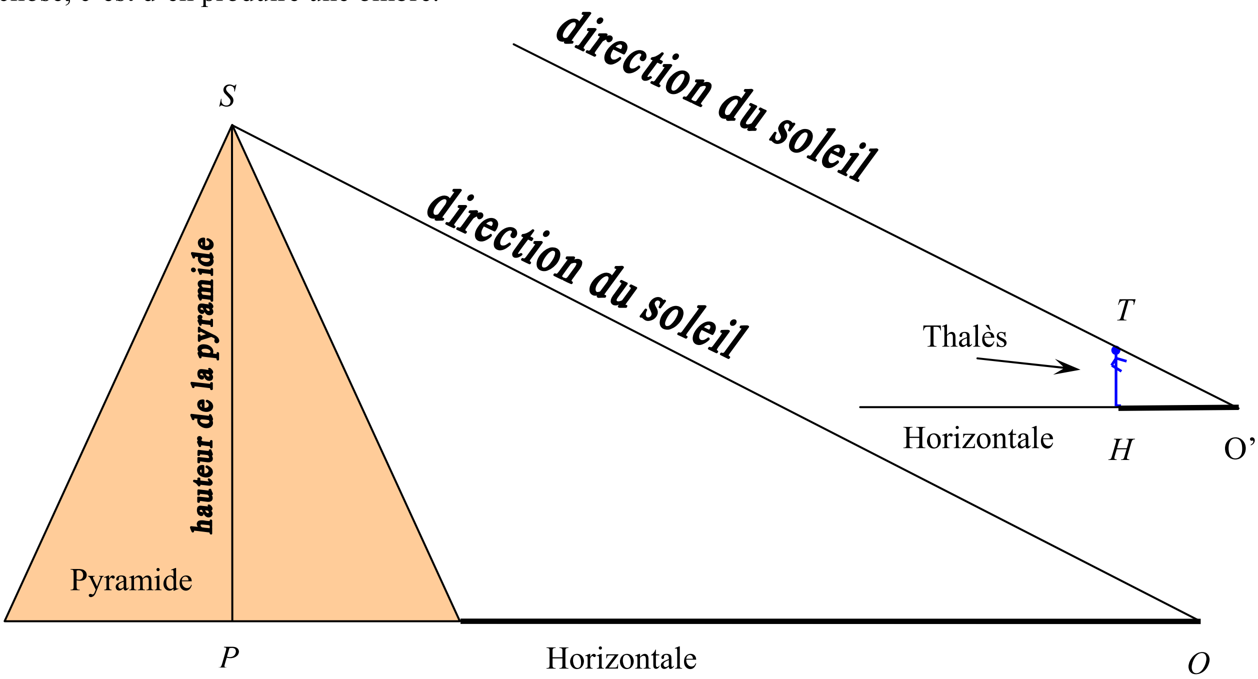
Dans "géomètre" la racine "mètre" a le sens de "celui qui mesure", et "géo" signifie "la Terre". Un géomètre est donc celui qui mesure la Terre.



La grande pyramide de Khéops

Thalès énonça son théorème ainsi : *"Le soleil traite équitablement chaque chose"*,ce qui est synonyme de : "Le Pharaon est juste et bon", du moins, c'est ce qu'il essayait de faire croire au petit peuple ...

Le traitement que le soleil fait subir à chaque chose, c'est d'en produire une ombre.



Traiter équitablement chaque chose, c'est en produire une ombre qui soit d'autant plus grande que la chose est plus grande (ou d'autant plus petite que la chose est plus petite). La pyramide étant très grande, son ombre est très grande. Thalès étant beaucoup moins grand que la pyramide, son ombre est beaucoup moins grande que celle de la pyramide. Connaissant la hauteur de Thalès et en mesurant la longueur de son ombre et celle de la pyramide on peut calculer la hauteur de celle-ci comme le montre la figure suivante. La longueur de l'ombre OP de la pyramide est à la hauteur SP de la pyramide ce que la longueur de l'ombre de Thalès O'H est à la hauteur TH de Thalès. Ce qui s'écrit :

$$\frac{OP}{SP} = \frac{O'H}{TH}$$

D'où la hauteur de la pyramide :

$$SP = OP\ \frac{TH}{O'H}$$

Thalès obtint ainsi 280 coudées égyptiennes, ce qui est très voisin de 147 m. Le Pharaon le félicita pour cet exploit dont on peut lire tous les détails dans le livre de Denis Guedj : "Le théorème du perroquet" chap.3. (Voir références).

Les triangles O'HT et OPS sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont la même forme mais pas les mêmes dimensions. Les angles correspondants sont égaux et les longueurs correspondantes sont proportionnelles. C'est la façon la plus commode pour retenir le théorème.

On peut alors écrire :

$$\frac{O'H}{OP} = \frac{O'T}{OS} = \frac{TH}{SP}$$

Dans les collèges français, le théorème de Thalès qu'on enseigne actuellement, porte sur des triangles, placés dans une configuration particulière. Dans les collèges allemands, il s'énonce ainsi : si un point C est sur un cercle de diamètre AB, alors le triangle ABC est rectangle en C. C'est un tout autre théorème que celui enseigné en France, mais c'est, paraît-il, une trouvaille de Thalès. Le nom de "théorème de Thalès" est destiné à rendre hommage au premier mathématicien connu de l'Histoire.

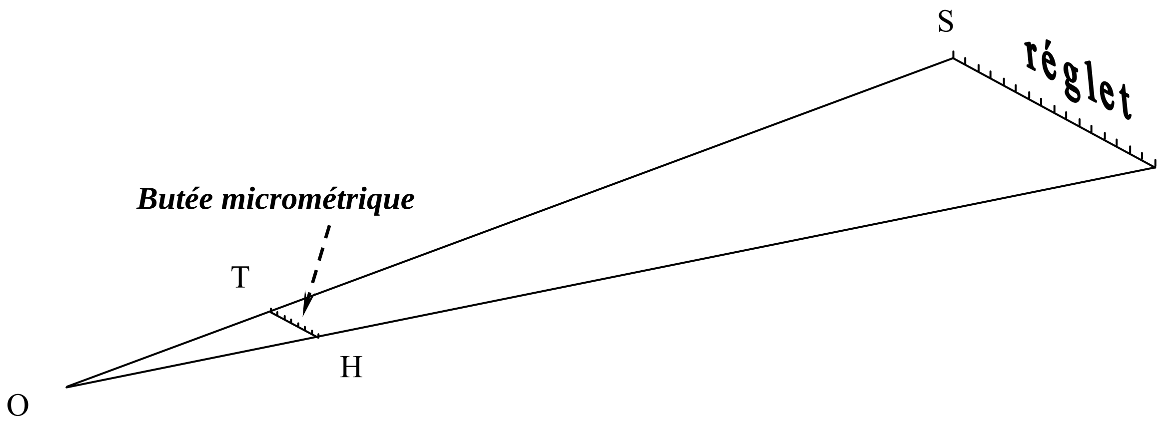


Schéma du télémètre

Le télémètre Thalès dont il est question ici, permet de calculer la distance OP en mesurant cette fois SP et TH. Il exploite l'idée que les triangles O'TH et OSP sont semblables : ils ont les mêmes angles, mais les côtés de l'un sont k fois plus grands que ceux de l'autre. k est appelé rapport de similitude. SP est mesuré par une règle de 1 mètre de long (horizontale), qu'on appellera par la suite "le réglet" et TH est mesuré par une butée micrométrique de palmer (instrument pour mesurer précisément de très petites distances : typiquement 50 mm à 1 micromètre près). Cette butée micrométrique est une vis de précision qui avance de 0,5 mm soit 500 micromètres ou 500 µm quand on la tourne d'un tour. La circonférence de ce tour est divisée en 50 graduations égales à 0,01 mm soit 10 µm. Il est important de noter que la direction de la butée micrométrique doit être parallèle à la direction du réglet ; de même que la hauteur de la pyramide SP était parallèle à la hauteur TH de Thalès (ce sont deux verticales).

Les triangles OTH et OSP sont maintenant dans un plan horizontal et ils ont même sommet O.

La distance OH est fixe et dans le télémètre considéré, elle est de 255,3 mm.

On a, comme précédemment :

$$\frac{OP}{SP} = \frac{OH}{TH}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$OP = OH\frac{SP}{TH} \qquad [1]$$

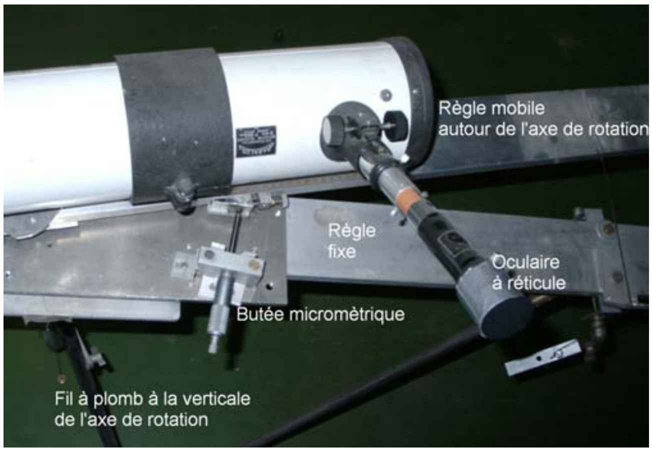
On mesure SP sur le réglet, TH à l'aide de la butée micrométrique, et la formule précédente donne la valeur de la distance cherchée OP.

Pour savoir si les points O, H, P d'une part, et O, T, S d'autre part, sont alignés, on n'utilise pas le soleil et l'ombre qu'il produit, mais un télescope avec lequel on va viser successivement, depuis le point O, les points P puis S. La butée micrométrique servira à repérer les positions H et T en faisant tourner le télescope autour du point O. Le point O est sur l'axe optique du télescope.

Un premier trépied supporte une règle de maçon fixe et solidaire de la butée micrométrique. Ce trépied possède un axe de rotation qui supporte une seconde règle solidaire du télescope et mobile autour de cet axe grâce à l'action de la butée micrométrique. La verticale de l'axe de rotation est matérialisée par un fil à plomb. La rotation est assurée par un gros roulement à bille récupéré sur l'axe d'une ancienne machine à laver. La butée micrométrique appuie sur une petite pastille bien plane en carbure de tungstène (alliage très dur utilisé pour certains outils de tour, de fraiseuse, ou sur des forets à béton) collée sur le chant de la règle mobile.

Voici une vue générale de l'appareil :

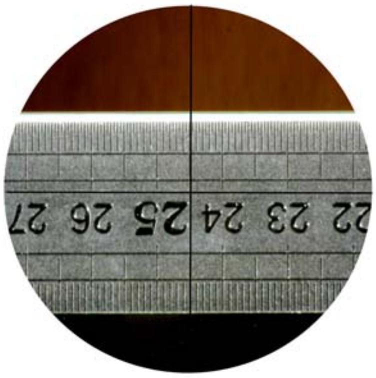
Vue de côté



Vue de dessus

Un second trépied supporte le réglet derrière lequel est accolé un miroir dans lequel se reflète le paysage (voir la photo au bas de la page). Ce réglet est lui-même monté sur un axe de rotation qui permet de l'orienter et en particulier de le mettre parallèle à la butée micrométrique par une procédure décrite plus loin et mettant en jeu le miroir qui n'a, en fait, pas besoin d'être aussi grand que celui sur la photo : il peut être limité au voisinage de la graduation centrale du réglet. Celui utilisé ici, est un miroir de salle de bain réfléchissant sur la face arrière. Il est entraîné autour de son axe de rotation par un moteur commandé grâce à un long fil, depuis le trépied du télescope, par une pile et un interrupteur inverseur (pour le faire tourner dans un sens ou dans l'autre). L'axe de rotation est rigoureusement à la verticale de la graduation 50 cm et est aussi matérialisé par un fil à plomb. La projection des fils à plomb sur le sol matérialise les deux points entre lesquels on mesure la distance.

Si l'on regarde dans l'oculaire du télescope, on peut voir une portion du réglet :



Le réglet est vu inversé (sens dessus dessous) parce qu'un télescope inverse les images. Noter les deux traits en croix du réticule de l'oculaire (selon deux diamètres perpendiculaires) pour repérer précisément le point P de visée. Le trait vertical du réticule indique sur le réglet la graduation 24,5 cm correspondant à un point P. On peut amener le télescope dans cette position en tournant la butée micrométrique représentée sur la photo suivante :

Sur la partie fixe, les chiffres des graduations indiquent les millimètres. En dessous, une deuxième graduation intermédiaire non chiffrée indique les demi millimètres. Sur le tambour tournant, les chiffres indiquent les centièmes de millimètres. La petite division du tambour indique donc un centième de millimètre ce qui est égal à dix micromètres. Avec une bonne vue et un peu

d'habitude, on peut apprécier le cinquième de division c'est-à-dire 2 µm.
Sur la photo ci-dessus, on peut lire :
17 + 0,5 + 0,35 + environ 6/10 de petite division = 17,856 mm

Pour faire une mesure de distance :

- On vise avec le télescope la graduation zéro du réglet (ou tout autre graduation, c'est-à-dire un point P). Pour cela, on fait coïncider le fil vertical de la croix du réticule de l'oculaire du télescope avec la graduation 0 du réglet (en tournant la butée micrométrique). On repère alors la position correspondante du vernier de la butée, par exemple 4,072 mm (c'est l'abscisse correspondant au point H).
- On vise ensuite la graduation 100 cm du réglet (ou tout autre graduation, c'est-à-dire un point S) en faisant tourner la butée micrométrique jusqu'à ce que le fil vertical de la croix du réticule de l'oculaire du télescope coïncide avec la graduation 100 cm du réglet. On note alors la position de la butée micrométrique : par exemple 14,584 mm ; C'est l'abscisse correspondant au point T. On a alors :

SP = 1 m = 1000 mm.
TH = 14,584 mm – 4,072 mm = 10,512 mm
La relation [1] fournit :

$$OP = OH\frac{SP}{TH} = 255{,}3\frac{1000}{10{,}512} = 24290$$

Donc **OP = 24290 mm = 24,29 m**

Il n'est, bien sûr, pas nécessaire de viser les graduations 0 et 100 cm du réglet. Tout autre graduation convient, il suffit de prendre la bonne valeur pour SP. Cette longueur s'appelle la **base**, et la mesure de distance est d'autant plus précise que la base est plus grande. Cette méthode s'apparente à une **triangulation**. La distance mesurée OP peut à son tour, servir de base pour une mesure de distance plus grande.

Cette méthode permet de mesurer la distance d'un point **accessible,** car elle y impose la présence d'une règle graduée. On peut, cependant, mesurer la distance d'un point **inaccessible** (par exemple la distance de la Terre à la Lune) si l'on sait mesurer les **angles**, et non plus seulement les longueurs. Cette nouvelle méthode de triangulation fait appel à un peu de trigonométrie, et implique l'usage d'un rapporteur ou d'un **goniomètre**. Elle ne sera pas décrite ici (voir le dernier numéro des Cahiers Clairaut où nous traitions de parallaxe ; voir aussi les "Cahiers Peiresc", cités dans l'encadré ci-après).

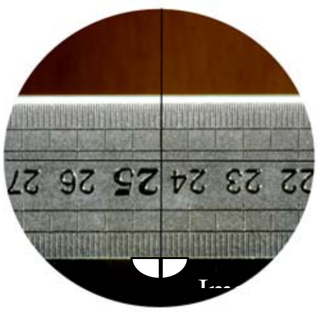
Procédure pour rendre le réglet parallèle à la butée micrométrique

Pour que les deux triangles OTH et OSP soient semblables (homothétiques même) il faut que TH et SP soient parallèles, c'est-à-dire que la direction de la butée micrométrique soit parallèle au réglet.

Le télémètre a été construit de façon à ce que la ligne de visée du télescope soit perpendiculaire à la direction du déplacement de la butée micrométrique quand celle-ci est sur la graduation médiane $x_0 = 25$ mm. Ceci étant, il suffit d'orienter l'ensemble, de façon à viser la graduation 50 cm du réglet. Ce réglage est facilité par une vis sur le trépied (on ne la voit pas sur la photo) qu'on peut tourner avec une manivelle pour orienter l'ensemble télescope plus règles précisément, sans modifier la butée micrométrique.

On utilise ensuite une propriété des miroirs plans, et en particulier de celui plaqué contre le réglet, pour rendre celui-ci perpendiculaire à la ligne de visée : un objet ponctuel et son image dans un miroir plan sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du miroir.

Sur la règle de maçon mobile (solidaire du télescope) est située une lampe de poche (type Maglite) légèrement en dessous de la ligne de visée (on la voit sur la vue générale de côté à l'extrémité de la règle de maçon). On voit son image dans le miroir à l'aide du télescope comme sur la photo suivante et on oriente le miroir de façon à ce que son image vienne sur le fil vertical du réticule. C'est la procédure d'autocollimation. Ce n'est pas un réglage critique. Si le réglet est mal orienté, et en supposant que la distance à mesurer est de l'ordre de 10 m, on commet une erreur qui ne dépasse pas 10^{-4} si l'image de la lampe est décalée d'un millimètre par rapport au réticule, et 10^{-3} si l'image de la lampe est décalée d'un centimètre.

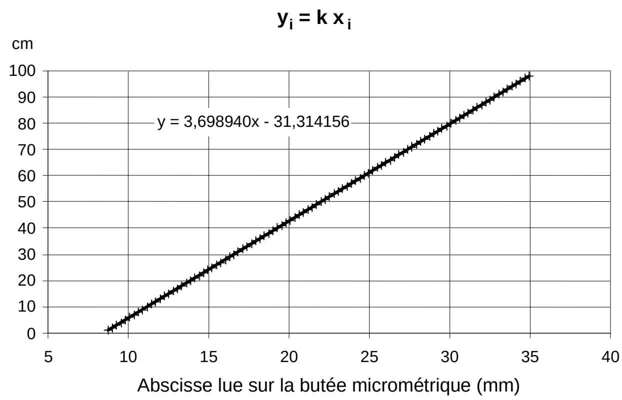


Les réglages sont terminés, il ne manque plus qu'à faire la mesure. En fait, on ne se contente pas de faire une seule mesure, mais toute une série, ce qui permet d'améliorer la précision en faisant des moyennes. On vise successivement les graduations

0, 1, 2, 3, 4, 5 ... 98, 99, 100 du réglet (on appelle y ces valeurs) et on note les positions correspondantes de la butée micrométrique (on les appelle x). On obtient ainsi un tableau de nombres à 2 colonnes et 100 lignes (50 si on n'a fait qu'une mesure tous les 2 cm sur le réglet). On rentre toutes ces valeurs dans son ordinateur à l'aide de son tableur favori (par exemple Excel). Le logiciel peut alors tracer y en fonction de x. Si tout s'est bien passé, on obtient une belle droite d'équation : y = kx

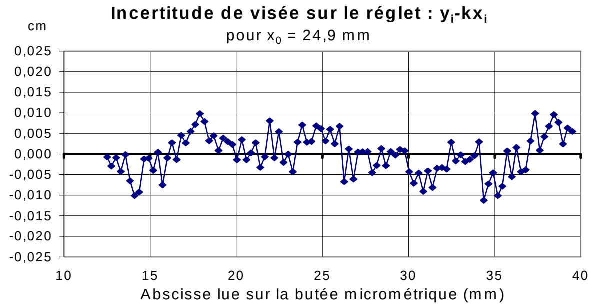
k est le rapport de similitude : c'est le rapport $\frac{SP}{TH}$ de l'équation [1]. La distance OP cherchée est alors : OP = k OH, où OH est la distance fixée par construction égale à 255,3 mm. La valeur de k est obtenue non plus avec une seule mesure mais avec 100 ! Et Excel donne la valeur moyenne de k en un clic de souris ! (fonction : courbe de tendance linéaire). Pour *ceux qui préfèreraient calculer la valeur moyenne de k à la main, voici la formule :*

$$k = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$



N est le nombre de mesures (100, ou seulement 50) et x_i et y_i sont les 100 couples de valeurs mesurées. Le signe Σ signifie qu'on doit faire la somme de la quantité qui le suit sur les N valeurs. La démonstration de la formule est accessible à tout étudiant de Terminale . Voici un tracé de $y_i = kx_i$, et la valeur de k fournie par la fonction "courbe de tendance linéaire" d'Excel.

D'où : k = 3,6989 cm/mm et OP = 255,3*k = 255,3* 3,6989*10 = 9443,3 mm = 9,4433 m



Mais Excel fait plus : il donne également la précision des mesures par une formule semblable à la précédente et toujours en un clic de souris. Pour apprécier le degré d'alignement des points, on peut tracer y_i-kx_i en fonction de x_i. On obtient un nuage de points dont la valeur moyenne des ordonnées est nulle (à une constante près). La visualisation de ce nuage permet de supprimer des points aberrants éventuels (erreur de saisie etc.), et ainsi d'améliorer la précision finale. Voici un tracé de y_i-kx_i où les ordonnées sont fortement dilatées pour mettre en évidence le nuage de points. C'est la fonction *Droitereg* d'Excel qui donne l'incertitude sur k : Δk = 0,00042 cm/mm. D'où OP = 9443,3 ± 1,1 mm. La précision relative est voisine de 10^{-4}. La distance mesurée entre les extrémités des fils à plomb, avec un mètre à ruban, ressort à 9,445 m, un tout petit peu en dehors de notre fourchette d'incertitude.

Si l'on dispose d'un goniomètre, on peut refaire la manipulation : la grandeur y est inchangée, et x représente maintenant la **tangente de l'angle**. Si les mesures ont été faites avec soin, on retrouve le même résultat. On peut aussi faire des moyennes.

Si l'on vise un point inaccessible, il faudra mesurer deux angles. On ne pourra plus faire de moyenne.

On commence avec un réglet, et on finit avec la distance Terre-Lune... Ou plutôt on ne finit pas, on peut aller au-delà, mais ça devient de plus en plus difficile car il faut des bases de plus en plus grandes, ou mesurer des angles de plus en plus petits !

C'est par cette méthode (en mesurant les angles) que Delambre et Méchain ont mesuré un arc de méridien terrestre de Dunkerque à Barcelone entre 1792 et1798 afin de définir l'étalon de mesure de longueur : le **mètre**. Il y avait, en tout, pas loin d'une centaine de triangles de 15 à 50 kilomètres de coté ! Avant eux, Maupertuis avait conduit une expédition en Laponie de 1737 à 1739 et La Condamine, au Pérou (de 1735 à 1744) pour voir si un degré de méridien terrestre était plus court au pôle ou à l'équateur. Ils en avaient déduit que la Terre est aplatie aux pôles. Encore avant eux, des

Chinois, conduits par l'astronome Yixing avaient arpenté la Terre pour mesurer un degré de méridien : c'était au huitième siècle de notre ère de 723 à 726 (mais n'oublions pas Ératosthène !) .
Aujourd'hui, on mesure la distance des étoiles proches en utilisant comme base, un diamètre de l'orbite terrestre, en faisant 2 visées à 6 mois d'intervalle.

Références

"Thalès, Pythagore, Euclide, Archimède", par Stéphane FAVRE-BULLE, aux éditions Ellipses, collection "Math en Bulles", c'est une BD !

"Le théorème du perroquet", Denis GUEDJ, Éditions du Seuil, roman très proche de l'histoire des mathématiques et qui devrait enchanter les élèves de Terminale...

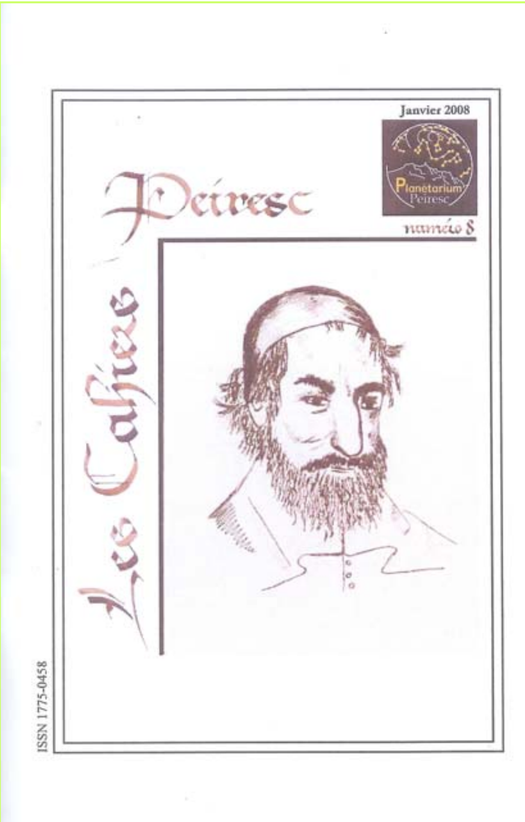
■

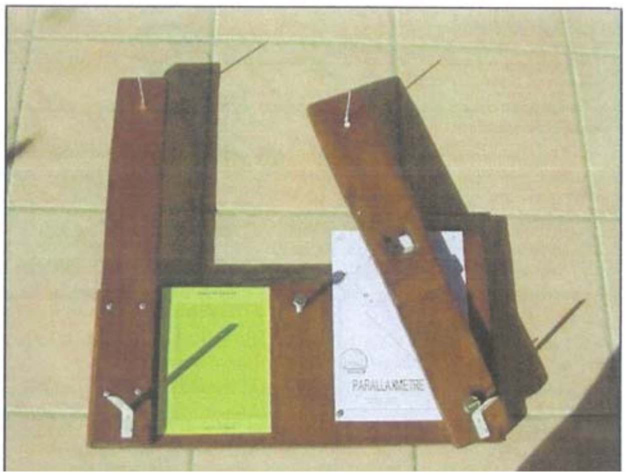
Connaissez-vous les Cahiers Peiresc ?

Philippe Malburet a eu la gentillesse de nous envoyer un exemplaire des Cahiers-Pereisc, le bulletin du Planétarium Peiresc d'Aix-en-Provence. Ce bulletin est fort intéressant et bien dans l'esprit de nos Cahiers Clairaut.

Hasard de l'édition, il se trouve que dans leur numéro de janvier, les Cahiers Pereisc traitaient de deux sujets du dernier numéro des Cahiers Clairaut : le calcul par les logarithmes et la parallaxe pour la mesure des distances d'étoiles. Dans ce dernier article, les auteurs, Pierre Fernandez, Philippe Malburet et Jean-Louis Poss, expliquaient le fonctionnement d'un petit "Parallaxmètre" très simple et assez semblable au parallaxomètre de Bardin. Vous verrez, ci-dessous, une photo de ce parallaxmètre, moins sophistiqué que celui que nous a présenté aujourd'hui Daniel Pascal, mais très accessible aux plus jeunes élèves.

Si vous voulez en savoir plus sur ce grand astronome qu'était Peiresc, reportez-vous à l'article de Jean Ripert dans les Cahiers Clairaut 101 et 102.





À gauche, la couverture des Cahiers-Peiresc. Ci-dessus, le parallaxmètre pédagogique.