CURIOSITES

Les logarithmes, la règle à calcul et les méthodes d'autrefois.

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *En l'espace d'une quarantaine d'années, les méthodes et les moyens de calcul ont changé plus qu'en plusieurs siècles auparavant. Nous voudrions retracer brièvement cette évolution, ce qui nous donnera l'occasion de parler des logarithmes, si utiles en astrophysique, et des moyens de calcul d'autrefois, pour faire sourire ou s'apitoyer la jeune génération.*

Mon premier souvenir sur les "log" date du jour où mon frère aîné, revenant d'un cours de mathématiques, m'annonça : "Avec les logarithmes, on transforme les multiplications en additions". Quelle aubaine pour un élève paresseux !

Effectivement, la fonction logarithme possède la remarquable propriété suivante :

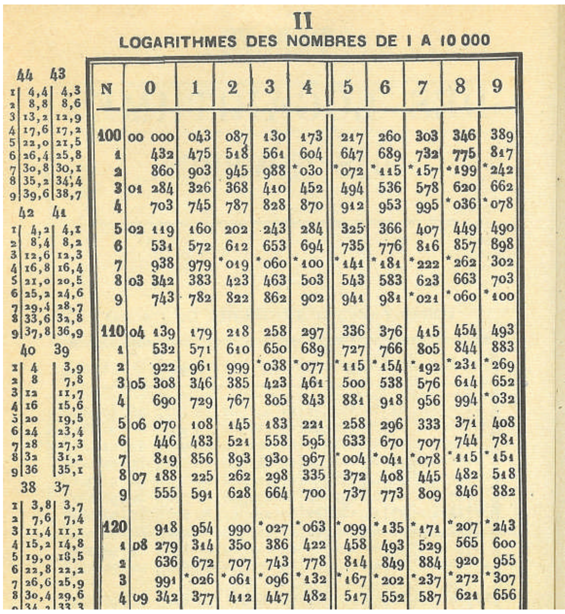
$$\log a + \log b = \log(ab)$$

A cette époque, les calculettes n'existaient pas et nous utilisions des tables qui donnaient les logarithmes décimaux (il existe d'autres types de logarithme), dont la célèbre table "Bouvard et Ratinet". Je ne résiste pas au plaisir de vous montrer cette petite table jaune en photo, pour les nostalgiques.

Quand vous vouliez trouver le logarithme décimal d'un nombre, vous deviez compter le nombre de chiffres significatifs moins un pour constituer la *caractéristique* et ensuite vous cherchiez dans la table la *mantisse* correspondant aux chiffres significatifs de votre nombre. Le groupement des deux donnait le log.

Donnons un exemple, en cherchant le logarithme décimal de 123,4. La caractéristique est 2 car le nombre, supérieur à un, possède 3 chiffres. Dans la table on trouve la mantisse de 1234, qui est : 09132. On trouve donc que log(123,4)=2,09132.

Si vous vérifiez sur l'image du contenu de la table, vous découvrirez un piège. Si le résultat est marqué d'une petite étoile, il faut prendre le début de la série suivante. Par exemple, pour 1234 vous pourriez, par erreur, dire que le résultat est 08132. Eh bien non ! c'est 09132. Je vous passe l'utilisation des petites tables d'interpolation pour ne pas devenir ennuyeux.



II

LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 10 000

	44	43		42	41		40	39		38	37
1	4,4	4,3	1	4,2	4,1	1	4	3,9	1	3,8	3,7
2	8,8	8,6	2	8,4	8,2	2	8	7,8	2	7,6	7,4
3	13,2	12,9	3	12,6	12,3	3	12	11,7	3	11,4	11,1
4	17,6	17,2	4	16,8	16,4	4	16	15,6	4	15,2	14,8
5	22,0	21,5	5	21,0	20,5	5	20	19,5	5	19,0	18,5
6	26,4	25,8	6	25,2	24,6	6	24	23,4	6	22,8	22,2
7	30,8	30,1	7	29,4	28,7	7	28	27,3	7	26,6	25,9
8	35,2	34,4	8	33,6	32,8	8	32	31,2	8	30,4	29,6
9	39,6	38,7	9	37,8	36,9	9	36	35,1			

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
1	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
2	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
3	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
4	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
5	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
6	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
7	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	302
8	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
9	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
1	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
2	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
3	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
4	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
5	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
6	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
7	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
8	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
9	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
1	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
2	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
3	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
4	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656

Un petit détail quand même : quand le nombre est inférieur à un, le log est négatif. On faisait le calcul en suivant une recette à base de cologarithme et de mantisse surlignée... il aurait été plus simple de multiplier le nombre par une puissance de 10 et de retrancher, in fine, le log de cette puissance. Par exemple : log(0,01234)=log(123,4)–log(10000), d'autant que log(10000) est facile à connaître, sans même consulter la table Bouvard et Ratinet, comme nous allons le voir.

Quelques propriétés du log décimal

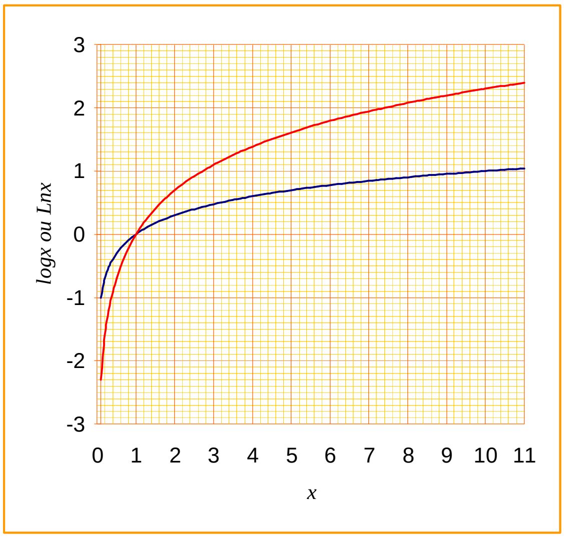
En astronomie ce sont les logarithmes décimaux qui sont utilisés, par exemple pour définir les magnitudes.
Les fonctions log ont deux propriétés fondamentales: celle vue en introduction :

$$\boxed{\log a + \log b = \log(ab)} \qquad (1)$$

et

$$\boxed{\log 1 = 0} \qquad (2)$$

On le voit immédiatement sur la figure ci-dessous, qui présente deux sortes de fonction log.



Courbes des log décimaux (en bleu) et népériens (en rouge)

De ces propriétés il découle simplement que :

$$\log a^2 = \log(a.a) = \log a + \log a = 2\log a$$

En répétant ce processus on trouve une autre propriété générale :

$$\boxed{\log a^n = n \log a} \qquad (3)$$

On a aussi une dernière propriété intéressante :

$$\log\frac{a}{a} = 0 = \log a + \log\frac{1}{a}$$

D'où l'on tire évidemment que :

$$\boxed{\log\frac{1}{a} = -\log a} \qquad (4)$$

Ce qui montre au passage que la propriété (3) est valable pour n négatif.

Les logarithmes décimaux qui jouissent de la propriété supplémentaire :

$$\boxed{\log 10 = 1} \qquad (5)$$

Dont on tire, par la relation (3), les log particuliers suivants :

$$\log 100 = 2$$
$$\log 1000 = 3$$
$$\log 10000 = 4$$

etc...

Les logarithmes népériens

Les logarithmes, dit népériens (notés ln ou Ln), obéissent à la relation :

$$Ln(e) = 1$$

où $e = 2{,}71828...$

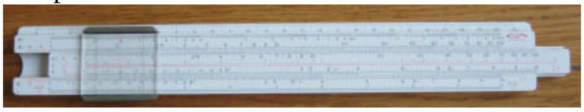
On passe très facilement d'un logarithme à l'autre avec la relation :

$$\log x = \frac{Ln(x)}{Ln(10)} \approx 0{,}4343\, Lnx$$

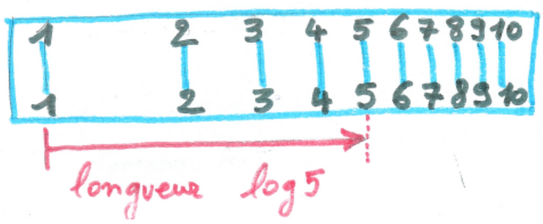
Avec les cinq propriétés numérotées, vous pouvez tout comprendre des subtilités astronomiques sur les magnitudes. Nous y reviendrons un peu plus loin. Pour l'instant nous allons nous intéresser à une vieille dame : "la règle à calcul".

La règle à calcul

Avant les calculettes, ou même les premières machines mécaniques à manivelle, les calculs étaient effectués à la main et à la règle à calcul. Le principe de cette règle magique est facile à comprendre.



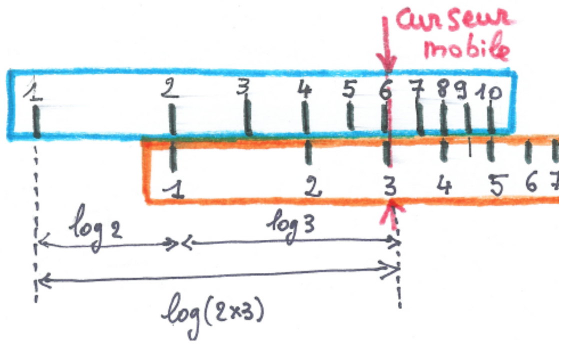
Imaginez une règle dont les positions des graduations 1, 2, 3 ...10, sont proportionnelles aux logarithmes de 1, 2, 3 etc.. La règle ressemblerait à ceci :



Quand nous pointons la valeur x sur les graduations, la longueur entre l'origine et cette graduation est $\log x$, en unité arbitraire.

Si nous mettons deux telles réglettes côte à côte, l'une fixe et l'autre mobile (au centre sur une vraie règle à calculer), on peut faire la somme de deux log, $\log x + \log y$. C'est tout simple : on place l'origine (qui est graduée "1" puisque $\log 1 = 0$) de la réglette mobile sur la graduation x de la réglette fixe. La longueur entre l'origine de la première réglette et la graduation y sur la deuxième réglette est $\log x + \log y = \log xy$.

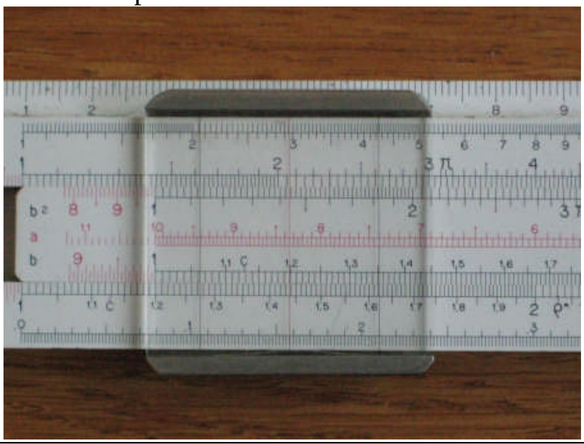
Bien, me direz-vous, mais comment avoir la valeur *xy* ? Là encore c'est tout simple. Si je place un curseur sur la valeur y de la deuxième réglette, ce curseur correspondra à la graduation *xy* de la première réglette. C'est le résultat cherché.



Nous constatons que 2 fois 3 donnent, à peu près, 6.

Passons à la pratique

Essayez de calculer, avec l'image ci-dessous, le résultat du produit 12 fois 12.



Essayez d'imaginer la procédure pour faire une division : c'est exactement le contraire : on place le curseur sur le dividende, on fait coïncider le diviseur avec ce même curseur en déplaçant la réglette mobile. Le résultat se lit en face de l'origine de la réglette mobile (le 1 de la réglette mobile). Vous comprendrez qu'il est très rapide d'enchaîner multiplication (A.C) et division (A.C)/B.

Plus la règle à calculer est longue, plus elle est précise. Certains fabricants ont eut l'idée de faire des règles circulaires, comme cette "montre à calcul", qu'un collègue (Ph. Merlin) m'avait rapportée d'URSS. Il y a eu une "règle" enroulée en hélice sur un cylindre. J'avais même imaginé une règle sur un film souple enroulé.

La montre à calculer russe

Les calculs de grand-papa

Je vais vous parler *d'un temps que les moins de vingt ans ne peuvent pas connaître*. Quand j'ai été recruté à l'Observatoire de Lyon, une de mes premières tâches consistait à faire et à "réduire" des observations de photométrie photoélectrique. Je ne vais pas détailler le sujet ici, mais sachez simplement que lors de la mesure nous utilisions un enregistreur à plume, dont la déviation était proportionnelle à l'éclairement mesuré. Il fallait travailler par nuits claires pour que l'extinction atmosphérique soit bien stable. Comment juger de cette stabilité ?

La précision visée devait être de quelques centièmes de magnitude. Quelle devait être la stabilité du signal ? Eh ! bien, par la bienveillance des logarithmes décimaux, il suffisait que le signal de la plume ait une stabilité de 1%. Expliquons-en la raison.

La magnitude est définie, à une constante additive près, par $m=-2,5 \log E$, où E est l'éclairement mesuré (déviation de la plume). Le "log" utilisé est un logarithme décimal. La variation de m est alors (voir l'encadré) :

$$|\Delta m| = 2,5\ |\Delta \log E| = 2,5 \times 0,4343\ |\Delta E/E| \approx |\Delta E/E|$$

Pour atteindre la précision de 0,01 magnitude, il suffisait que la stabilité du signal soit bonne à 1%, ce qui se calcule très facilement.

Propriété de dérivation

Une propriété fondamentale, à la base même de la définition du Logarithme népérien est que, sur $]0\ ;+\infty[$, la primitive, nulle en 1, de $1/x$ est Lnx.. Dit d'une autre façon :

$$\frac{dLnx}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ce qui conduit aussi à :

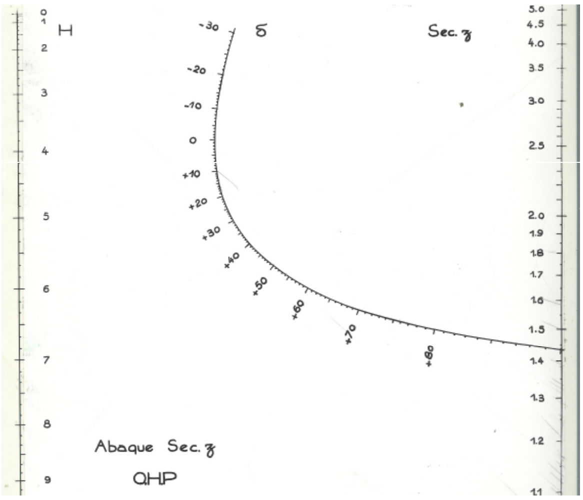
$$\frac{\Delta x}{x} = \Delta Lnx \approx \frac{\Delta \log x}{0,4343}, \text{ car}$$

$$\log x = \frac{Ln(x)}{Ln(10)} \approx 0,4343\ Lnx$$

Oublier ce facteur 0,4343 dans la dérivation des magnitudes, définies par des logarithmes décimaux, est une erreur fréquente.

Un autre calcul revenait souvent dans cette réduction de données : la fameuse fonction 2,5log. Pour elle nous avions des tables numériques.

Pour le calcul de la distance zénithale nous avions un abaque, afin d'éviter la résolution fastidieuse des triangles sphériques (voir l'article CC117, p2).



Enfin, parfois nous pouvions avoir des résolutions de triangles sphériques. Les calculs devaient être précis. La table *Bouvard et Ratinet* aurait été insuffisante. Nous utilisions la non moins célèbre table Schrön, à neuf décimales, qui donnait, entre autres fonctions, les log des sinus, des cosinus. Les produits de fonctions trigonométriques se calculaient ainsi, comme mon grand frère me l'avait appris, en transformant les multiplications en addition.

L'ère électronique

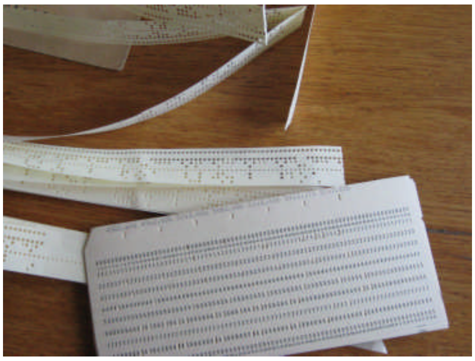
La première machine électronique qui nous fit rêver, mes collègues et moi-même, ce fut une calculette de plus d'un kilogramme, faisant électroniquement les quatre opérations et même la racine carrée. Mais ce bijou, inaccessible aux jeunes astronomes, fut vite supplanté par un autre, encore plus merveilleux, mais tout aussi inaccessible, la calculette classique de nos jours, avec, bien sûr, toutes les fonctions trigonométriques. Faute de pouvoir nous acheter ces merveilles, étions-nous à ce point démunis pour les calculs ? Non, car nous avions déjà des ordinateurs superpuissants. Je vais vous en parler immédiatement.

Quand j'ai été engagé, l'Observatoire de Lyon venait justement d'acheter un supercalculateur PDP8S. Les esprits malicieux disaient que le S signifiait "slow" (lent). Le 8 signifiait 8K, taille de la mémoire à tores de ferrite. Dans ces 8K, nous devions loger le système (l'équivalent du

DOS) et les programmes que nous écrivions en un langage oublié, le FOCAL. Qui parle encore le FOCAL de nos jours ? sans doute peu de monde. C'est une langue morte. Ce langage était en fait un BASIC très rudimentaire, qui ne connaissait, dans la version de base, que les variables numériques.

Avec si peu de mémoire, l'écriture de programmes relevait du tour de force. Dès qu'une variable ne servait plus, il fallait la réutiliser pour autre chose, ce qui rendait les programmes particulièrement illisibles.

"Et la mémoire de masse ?", me direz-vous. Il n'y avait pas encore de disque dur. Les programmes, une fois mis au point, étaient imprimés sur des rubans perforés, ultérieurement remplacés par les cartes perforées.



Un lecteur attaché au *télétype*, sorte de machine à écrire "à boule", d'une vitesse de frappe impressionnante (10 caractères par seconde !), permettait de recharger en mémoire les programmes antérieurs, ou même de lire des données, saisies directement sur ruban à l'aide du *télétype*.

Les performances de la machine vous surprendraient. Pour faire un calcul des moindres carrés, avec une dizaine de points, il fallait pas moins d'une minute... Le S était peut-être bien justifié.

Nous étions pourtant très heureux d'avoir ce puissant moyen de calcul. Je me souviens avoir lu, à cette même époque, un article de Jean-Claude Pecker, d'une génération avant la mienne, qui déclarait que le modèle qu'il présentait lui avait demandé vingt heures de calculs manuels (je crois qu'il s'agissait de modèles d'atmosphère stellaire).

Le premier disque dur qui équipa ce calculateur devait avoir une capacité d'une centaine de kilo-octets. Mais les progrès furent fulgurants ; dix ans plus tard, le disque dur de notre nouvelle machine affichait 10 méga-octets ; 10 ans encore et nous passions à 1 giga-octets pour, aujourd'hui, dix ans plus tard encore, arriver à un demi-téraoctet.

Encore les logarithmes

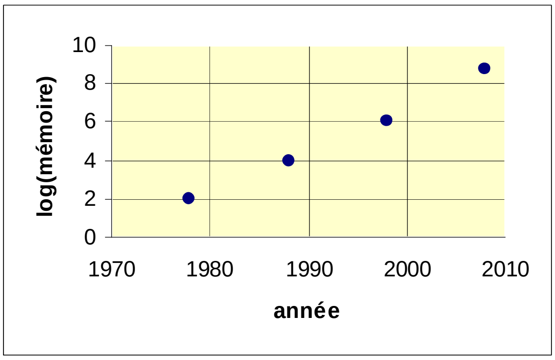
Où s'arrêtera cette croissance fulgurante ? Il est sans doute possible de répondre. En effet, cette croissance est exponentielle. Ce sens est très précis. Il signifie que l'accroissement par unité de temps est fonction de la valeur du moment. Plus la valeur est grande, plus l'accroissement à venir sera grand. En termes mathématiques, cela signifie que l'accroissement Δx pour un intervalle de temps Δt est proportionnel à x. Ce qui s'écrit : $\Delta x = k\ x\ \Delta t$

C'est-à-dire : $\dfrac{\Delta x}{x} = k\ \Delta t$

En intégrant ce résultat on trouve que si x a une croissance exponentielle, il suit la loi[1] :

$Lnx = \alpha.t + \beta$, où α et β sont deux constantes.

Si la taille des mémoires de masse (disque dur) des ordinateurs croît de manière exponentielle, quelle sera la taille des mémoires dans dix ans ?



La loi trouvée (dite de Moore - cf "*L'intelligence et le calcul*" de J.-P. Delahaye, chez Belin, *Pour la science*, 2002) est représentée à peu près par l'équation : log(mémoire)=0.22(t–1970). En 2018 log(mémoire) vaudra donc 10,56 d'où une mémoire de 36 téraoctets.

Si vous avez des données plus précises, refaites cet exercice, par exemple pour les diamètres des télescopes. G. de Vaucouleurs s'y était amusé, il y a longtemps !

■

[1] Cette relation peut s'écrire : $x = \exp(\alpha\ t + \beta)$, qui est la loi mathématique exponentielle.