# AVEC NOS ELEVES

# L'équation du temps

**Béatrice Sandré**

**Résumé :** *Le but du travail qui suit est de retrouver l'équation du temps en fonction de la date.*

## Heure solaire et heure légale

L'heure solaire est indiquée par un cadran solaire. C'est aussi l'angle horaire H du soleil (figure 1), exprimé en heures (1 heure = 15°) et augmenté de 12 heures. L'heure légale est donnée par une horloge, l'horloge atomique de Brunswick par exemple.

En prenant une photographie du Soleil tous les dix jours pendant une année à la même heure de la montre, on constate que l'angle horaire du Soleil n'est pas toujours le même.

Mesurés avec une horloge, tous les jours solaires de l'année n'ont pas la même durée. Certains durent plus de 24 heures, d'autres moins ; 24 heures n'est que la valeur moyenne du jour solaire sur une année. En France métropolitaine par exemple, la relation liant l'heure solaire et l'heure légale peut s'écrire :

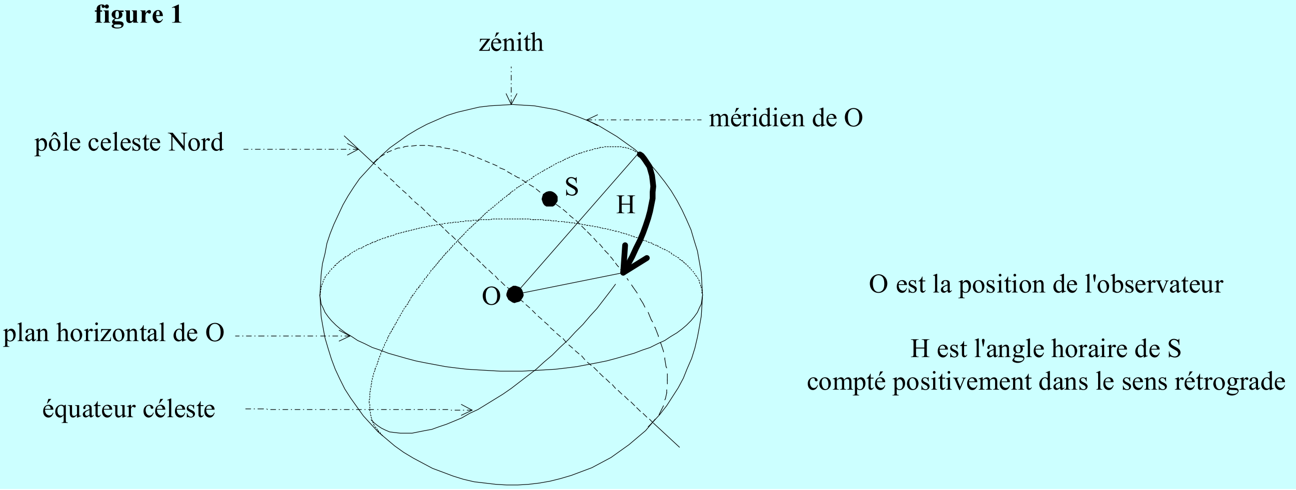
$$\text{heure légale} = \text{heure solaire} + \text{longitude} + \begin{cases} \text{1 heure en hiver} \\ \text{2 heures en été} \end{cases} + \text{équation du temps}$$

La longitude est mesurée en heure (1 heure = 15°) et comptée positivement vers l'Ouest. L'équation du temps est une correction dépendant de la date, due à la durée inégale des jours solaires au cours de l'année.

Mais en moyenne sur une année, l'équation du temps est nulle.

*Concrétisation de l'équation du temps dans le ciel de Crimée*
*Crédit : V. Rumyantsev / observatoire de Naucsny*

**figure 1**



## Jour solaire et Soleil moyen

La sphère céleste tourne autour de l'axe des pôles de l'observateur d'un tour en $T_o$ = 23 heures 56 minutes.
Ce mouvement est uniforme de vitesse angulaire $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ constante dans le sens rétrograde.

Sur la sphère céleste, le Soleil décrit un grand cercle appelé écliptique en $T_a$ = 1 an dans le sens direct. Si ce cercle était confondu avec l'équateur céleste et si le mouvement du Soleil y était uniforme, la vitesse angulaire du Soleil sur la sphère céleste serait uniforme et égale à $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$ dans le sens direct.

La vitesse angulaire du Soleil par rapport à l'observateur serait $\omega_o - \omega_a = 2\pi\left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_a}\right)$ dans le sens rétrograde et la durée du jour solaire, c'est à dire la durée d'un tour :

$$\boxed{T_j = \frac{2\pi}{\omega_o - \omega_a} = \frac{T_o T_a}{T_a - T_o} = 24{,}00 \text{ heures}}$$

Mais l'écliptique est incliné par rapport à l'équateur céleste et le mouvement du Soleil sur l'écliptique n'est pas uniforme. 24 heures est la durée du jour légal mais ce n'est que la moyenne de la durée du jour solaire.

Nous appellerons "Soleil moyen", un point se déplaçant sur l'équateur céleste (et non sur l'écliptique), à vitesse angulaire constante, d'un tour en un an dans le sens direct. Son ascension droite est donc une fonction affine du temps t :

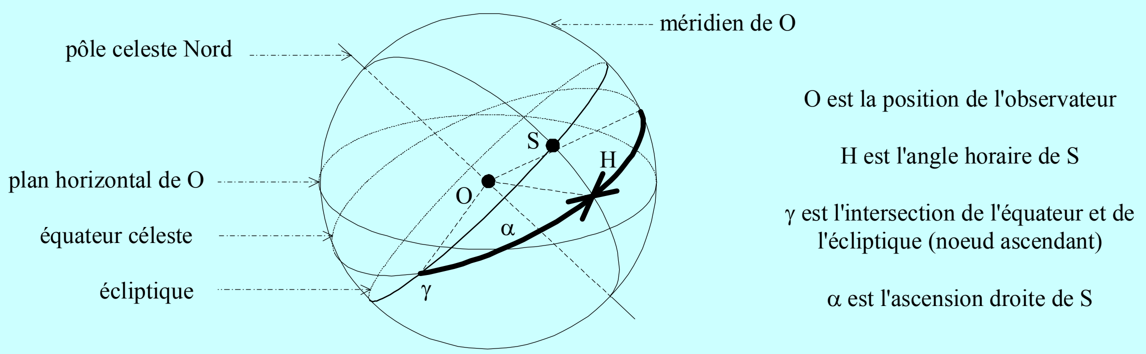
$$\alpha_m = \alpha_o + 2\pi \frac{t}{T_a} \text{ rad}$$

La valeur de $\alpha_o$ sera choisie de telle sorte que l'écart entre les ascensions droites du Soleil réel et du Soleil moyen soit nul en moyenne au cours d'une année.

L'équation du temps est la différence entre les angles horaires du Soleil moyen $H_m$ et du Soleil réel H. Ascension droite et angle horaire étant comptés positivement dans des sens opposés, c'est aussi la différence entre les ascensions droites du Soleil réel $\alpha$ et du Soleil moyen $\alpha_m$ :

$$\boxed{\text{équation du temps} = H_m - H = \alpha - \alpha_m}$$

**figure 2**



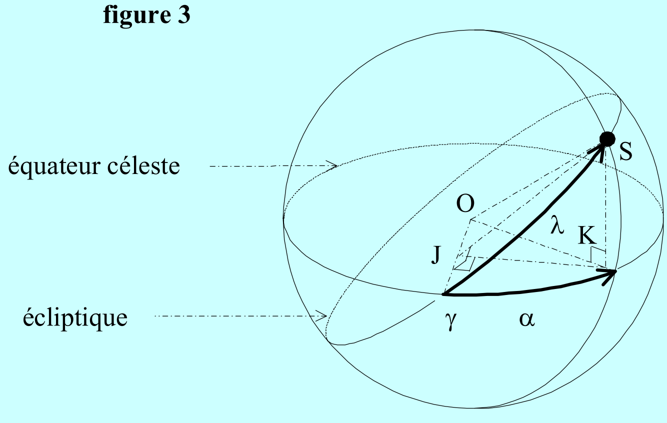

## Longitude écliptique et ascension droite du Soleil

La figure 3 ci-contre rappelle la définition de la longitude écliptique $\lambda$ du Soleil S.
Longitude écliptique et ascension droite du Soleil sont liées par une relation que nous allons établir et qui fait intervenir l'angle $\varepsilon$ entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique.

K est la projection orthogonale de S sur le plan de l'équateur.

J est la projection orthogonale de S sur O$\gamma$ ; c'est aussi la projection orthogonale de K sur O$\gamma$.

**figure 3**



$\left(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JS}\right) = \varepsilon$, angle entre le plan de l'équateur et le plan de l'écliptique.

$$\left.\begin{array}{l} JK = OJ \tan\alpha \\ JS = OJ \tan\lambda \\ JK = JS \cos\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{JK}{JS} = \frac{\tan\alpha}{\tan\lambda} = \cos\varepsilon$$

$$\boxed{\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan\lambda}$$

Cette relation est suffisante pour déterminer $\alpha$ connaissant $\lambda$ (ou réciproquement) car les angles $\alpha$ et $\lambda$ appartiennent toujours au même quadrant.

Elle montre que l'ascension droite du Soleil n'est pas proportionnelle à sa longitude écliptique. Même si le Soleil avait eu un mouvement uniforme sur l'écliptique, son ascension droite n'aurait pas été fonction affine du temps.

## Longitude écliptique du Soleil au cours du temps

La longitude écliptique du Soleil dans le référentiel géocentrique est identique à la longitude écliptique de la Terre dans le référentiel héliocentrique.

Le mouvement de la Terre autour du Soleil suit la loi des aires, mais la trajectoire n'étant pas circulaire, le mouvement de la Terre n'est pas uniforme et la longitude écliptique du Soleil n'est pas une fonction affine du temps.

La trajectoire de la Terre est une ellipse de foyer S, de demi-grand axe a, d'excentricité e et de périgée P. Son équation en coordonnées polaire d'origine S et de direction origine SP s'écrit :

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}.$$

L'aire de l'ellipse est $\text{aire} = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$ et la période du mouvement est $T_a = 1$ an.

La loi des aires peut donc s'écrire :

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{\text{aire}}{T_a} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T_a},$$

d'où, compte tenu de l'équation de la trajectoire,

$$\frac{a^2\left(1-e^2\right)^2}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T_a}.$$

En séparant les variables $\theta$ et t, on obtient l'équation différentielle :

$$dt = \frac{T_a}{2\pi}\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}d\theta.$$

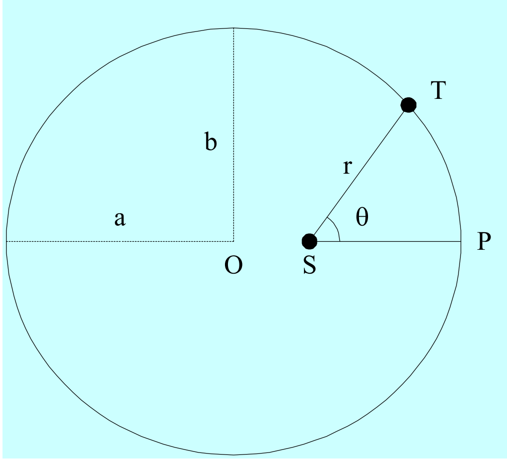
Elle permet de calculer la date $t_i$ à laquelle la Terre se trouve à la distance angulaire $\theta_i$ du périgée par intégration numérique :

$$\boxed{t_i = t_P + \frac{T_a}{2\pi}\int_0^{\theta_i}\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}d\theta}$$

$t_P$ étant la date de passage au périgée.

On peut ainsi calculer la date de passage $t_i$ pour chacune des valeurs de $\theta_i$ choisies.

**figure 4**




En ajoutant la longitude écliptique $\lambda_P$ du périgée P à chacune des valeurs de $\theta_i$, on obtient la longitude écliptique $\lambda$ du Soleil réel (ou de la Terre) en fonction du temps. Son ascension droite est ensuite déterminée grâce à la relation :

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan\lambda$$

## Soleil fictif et Soleil moyen

L'équation du temps est l'écart en ascension droite entre le Soleil réel et le Soleil moyen. Mais pour connaître la position du Soleil moyen, il nous manque la valeur de $\alpha_o$. Nous la déterminerons en écrivant que la valeur moyenne de $\alpha - \alpha_m$ est nulle sur une année.

Considérons un Soleil fictif de même ascension droite $\alpha_P$ que le Soleil réel lorsque celui-ci passe à son périgée P et ayant un mouvement uniforme de période $T_a$ = 1 an le long de l'équateur céleste. Son ascension droite en fonction du temps s'écrit alors :

$$\alpha_f = \alpha_P + 2\pi\frac{t-t_P}{T_a}\ \text{rad}$$

Mais la date de passage de la Terre au périgée n'étant pas confondue avec une date de solstice, la valeur moyenne de $\alpha - \alpha_f$ au cours d'une année n'a aucune raison d'être nulle. Le Soleil fictif n'est pas confondu avec le Soleil moyen. Mais l'écart entre les ascensions droites du Soleil fictif et du Soleil moyen est constant et vaut :

$$\alpha_P - \alpha_o .$$

La valeur moyenne de $\alpha - \alpha_m$ étant nulle sur une année, la valeur moyenne de $\alpha - \alpha_f$ vaut :

$$\alpha_P - \alpha_o .$$

$\alpha_P$ est donné par les éphémérides et nous avons montré que nous pouvions calculer $\alpha$ en fonction du temps. Une intégration numérique nous donne la valeur moyenne $edt_o$ de $\alpha - \alpha_f$ sur une année. On en déduit $\alpha_o = \alpha_P - edt_o$. L'ascension droite du soleil moyen en fonction du temps est $\alpha_m = \alpha_P - edt_o + 2\pi \frac{t - t_P}{T_a}$ et l'équation du temps $edt = \alpha - \alpha_P + edt_o - 2\pi \frac{t - t_P}{T_a}$

## Déroulement du calcul

Pour obtenir les caractéristiques de l'orbite de la Terre, on peut relever sur le site de l'IMCCE :

* la date de passage au périgée et la longitude écliptique à cette date :

$$\boxed{t_P = 3 \text{ Janvier 2007 à 20 heures} \quad ; \quad \lambda_P = 282°57'43,6614''}$$

* la distance minimale et la distance maximale de la Terre au Soleil (périgée et apogée) en unité astronomique :

$$\boxed{d_{min} = 0,983260183 \text{ u.a.} \quad ; \quad d_{max} = 1,016705946 \text{ u.a.}}$$

* la valeur maximale de la déclinaison du Soleil, égale à l'inclinaison du plan de l'écliptique par rapport au plan de l'équateur :

$$\boxed{\varepsilon = 23°26'18,0332''}$$

* les temps seront mesurés en jours et la durée d'une année est :

$$\boxed{T_a = 365,25 \text{ jours}}$$

L'excentricité de l'orbite terrestre est :

$$e = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} = 0,01672316484$$

La longitude écliptique du périgée appartenant au quatrième quadrant :

$$\alpha_P = \arctan\left(\tan \lambda_P \times \cos \varepsilon\right) = -1,324997264 \text{ rad.}$$

Pour calculer la valeur moyenne de $\alpha - \alpha_f$, il est nécessaire de connaître $\alpha(t)$ avec un pas "très serré", afin de faire une bonne intégration numérique. Nous avons choisi de calculer la date $t_i$ de passage en $\theta = \theta_i$ avec un pas pour $\theta$ de $\frac{2\pi}{365}$ rad soit 365 points pour une année.

$$\theta_i = i \times \frac{2\pi}{365} \text{rad}$$

et, en choisissant l'origine des dates à l'instant de passage de la Terre à son périgée :

$$t_i = \frac{T_a}{2\pi} \int_0^{\theta_i} \frac{\left(1 - e^2\right)^{3/2}}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2} d\theta$$

La longitude écliptique du Soleil à cette date est :

$$\lambda_i = \theta_i + \lambda_P$$

L'ascension droite du Soleil à cette date est :

$$\alpha_i = \arctan(\tan \lambda_i \times \cos \varepsilon) \quad \text{si} \quad \cos \lambda_i > 0$$

$$\alpha_i = \arctan(\tan \lambda_i \times \cos \varepsilon) + \pi \text{ rad} \quad \text{si} \quad \cos \lambda_i < 0$$

Puis, on ramène $\alpha_i$ dans le domaine $\left[0, 2\pi\right[$.

L'ascension droite du Soleil fictif à cette date est : $\alpha_{fi} = \alpha_P + 2\pi \frac{t_i}{T_a}$ que l'on ramène dans le domaine $\left[0, 2\pi\right[$.

La valeur moyenne de $\alpha - \alpha_f$ sur une année est :

$$edt_o = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} \left(\alpha(t) - \alpha_f(t)\right) dt .$$

Nous calculons donc :

$$edt_o = \frac{1}{T_a} \sum_{i=1}^{365} \frac{\left(\alpha_{i-1} - \alpha_{f\,i-1}\right) + \left(\alpha_i - \alpha_{f\,i}\right)}{2} \times \left(t_i - t_{i-1}\right)$$

et obtenons :

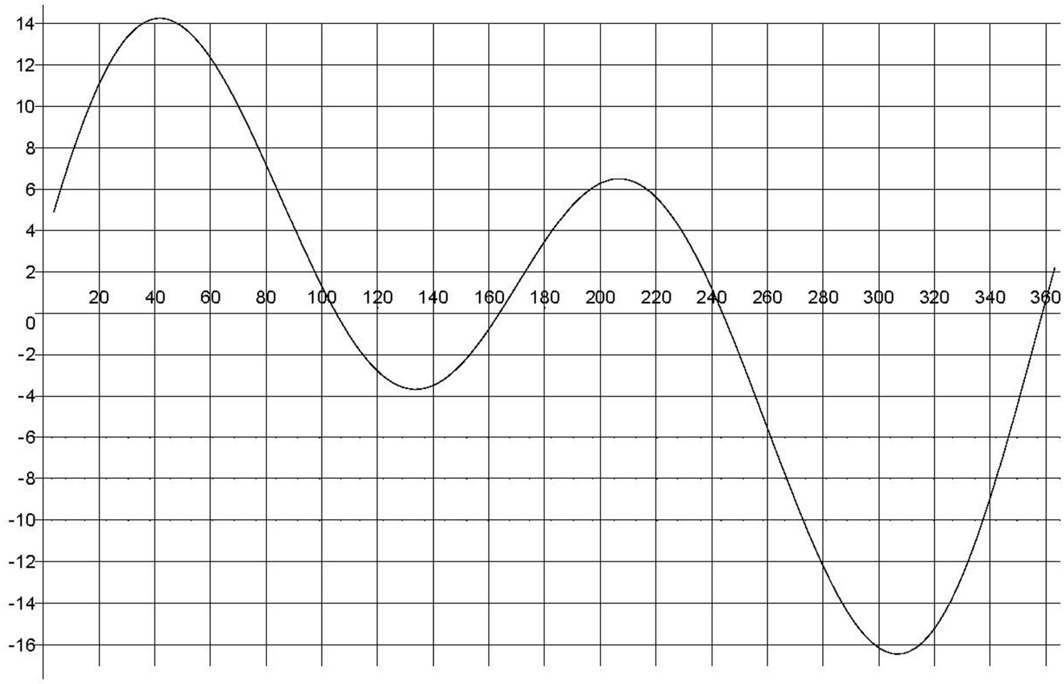
$$\boxed{edt_o = -0,0195633 \text{ rad} = -1,12089°}$$

Le Soleil moyen est en retard de 1,12° sur le Soleil fictif.

A la date $t_i$, l'équation du temps sera $edt = \alpha_i - \alpha_{fi} - edt_o$, que l'on obtiendra en radians.
En minutes de temps, sa valeur sera $edt = \left(\alpha_i - \alpha_{fi} - edt_o\right) \times \frac{180}{\pi} \times \frac{60}{15}$.

Nous avons choisi l'origine des dates à l'instant du passage du Soleil au périgée de l'année 2007. Celui-ci ayant eu lieu le 3 Janvier à 20 heures, il faudra ajouter $\left(2 + \frac{20}{24}\right)$ jours à $t_i$ pour placer l'origine des dates au 1er Janvier de l'année 2007.

La courbe ci-dessous donne l'équation du temps en minutes en fonction de cette date.




*Equation du temps (minutes) en fonction de la date (jours)*

■

## Comment tracer une pseudo-ellipse à la règle et au compas

Nous avions posé ce problème dans le dernier numéro. En fait, comme nous le disions, il ne s'agit pas d'une ellipse exacte mais d'une représentation aussi précise que possible. Ce problème est bien connu des anciens dessinateurs industriels qui devaient tracer une ellipse donnée par le demi-grand axe *a* et le demi-petit axe *b*. Cette figure géométrique, projection d'un cercle sur un plan oblique, est très courante. Voici la méthode :

Posons OA=*a* ; OB'=*b*. On trace la droite perpendiculaire en O à [OA]. On reporte la longueur OB=OB'=*b*. On trace le segment [AB] et, depuis le point B, on trace un arc de cercle de rayon *a*–*b* qui coupe [AB] en D. On trace la médiatrice de [AD], qui coupe le segment [OA] en C' et le support de [OB] en C. Depuis le centre C' on trace un arc de cercle AE de rayon C'A. Depuis le centre C on trace l'arc de cercle EB de rayon CE. On obtient un quasi quart d'ellipse AEB.
Il suffit de recommencer pour tracer les trois autres quarts. Heureusement que nous avons la DAO ! GP■