

## MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS DES TRAJECTOIRES PROCHES DE LA VERTICALE

Blaise SIMON, Docteur ès sciences

**Résumé :** *On sait que la rotation de la Terre sur elle-même est prouvée, entre autres expériences, par la déviation vers l'est de la chute des corps lâchés sans vitesse initiale. Dans cette note, nous montrons comment la rotation de la Terre se manifeste dans d'autres expériences de balistique (objets lancés verticalement vers le haut, objets rebondissant après une chute libre).*

### Introduction

A l'époque où la rotation de la Terre sur elle-même n'était pas encore bien admise par le public (disons au dix-septième siècle), les astronomes qui en cherchaient une preuve expérimentale pensaient en tenir une dans le mouvement des projectiles <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>. En effet on imagine bien que, sur une Terre tournante, la portée d'un canon tirant vers l'est n'est pas la même que s'il tire vers l'ouest. Quant à calculer cette différence de portée, ce n'était pas commode, l'analyse mathématique n'étant pas aussi efficace que maintenant. D'autre part, vérifier cette hypothèse par l'expérience, il ne fallait pas trop y compter, étant donné le caractère rudimentaire de l'artillerie de l'époque. Donc, preuve à chercher ailleurs. En particulier, pour les trajectoires verticales, on se posait deux questions :

### Si la Terre tourne, où retombe un boulet tiré verticalement ?

Il ne semble pas que l'expérience ait réellement été faite, mais on y pensait (figure 1).



**Figure 1 :** *Si la Terre tourne, un boulet tiré à la verticale ne retombera probablement pas à son point de départ. On peut même imaginer qu'il ne retombe pas du tout (Descartes n'en aurait pas été autrement surpris).*

### Si la Terre tourne, où tombe un objet lâché d'une grande hauteur ?

Ici, l'expérience est plus facile à faire, car il ne manque pas de monuments du haut desquels on peut facilement lâcher des billes ; on peut aussi travailler dans des puits de mines. La première expérience concluante fut faite en 1802 par Benzenberg à Hambourg, du haut d'une tour de 76m, montrant une déviation de la chute à l'est de la verticale. Reich, en 1831, confirma ces résultats par des expériences plus soigneuses. Des mathématiciens comme Laplace et Gauss s'intéressèrent au problème, et montrèrent en effet que dans l'hypothèse d'une Terre faisant un tour sur elle-même en 24 heures, le calcul de la chute d'un corps montrait une déviation vers l'est égale à celle qu'on observait. *La rotation de la Terre sur elle-même était donc prouvée.*

Dans la présente note, après un rappel des équations du mouvement, et la description classique de la chute libre, nous décrirons un certain nombre de trajectoires proches de la verticale, qu'on ne voit pas souvent décrites dans la littérature.

### Mouvement d'un objet soumis uniquement à l'attraction du globe terrestre en rotation

C'est le cas d'un projectile lancé dans le vide, et qui n'est plus soumis à l'action du système qui l'a propulsé. Quand on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même, l'accélération  $\vec{a}$  du mouvement par rapport à un repère fixe sur le sol terrestre n'est pas seulement  $\vec{g}$ , mais <sup>(3)</sup> :

$$\vec{a} = \vec{g} - 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \quad (1)$$

$\vec{g}$  est l'accélération de la pesanteur au lieu où se trouve l'objet, résultant de l'attraction newtonienne du globe, et de l'accélération centrifuge due à sa rotation. Sa direction est la verticale locale, donnée par le fil à plomb; au niveau du sol, sa norme est d'environ  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ .

$\vec{\Omega}$  est le vecteur représentant la rotation de la Terre par rapport à la voûte céleste; il est parallèle à l'axe des pôles, et sa norme, indépendante du lieu, est  $7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ .

$\vec{v}$  est la vitesse de l'objet par rapport à des axes fixés au sol.

La quantité  $-2(\vec{\Omega} \wedge \vec{v})$  est l'accélération de Coriolis; à cette accélération correspond ce qu'on appelle la force de Coriolis,  $-2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v})$ ,  $m$  étant la masse de l'objet.

Dans les conditions usuelles, la vitesse  $v$  est d'environ un à dix mètres par seconde et l'accélération de Coriolis est bien plus faible que l'accélération de la pesanteur, de sorte qu'elle passe inaperçue. Mais dans certaines conditions (pendule de Foucault) elle peut être parfaitement observable.

La force de Coriolis ressemble à la force de Lorentz,  $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ , qui agit sur une charge  $q$  en mouvement dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Dans un champ uniforme, la trajectoire est une hélice, tout le monde apprend ça au lycée. Nous en verrons un exemple voisin en étudiant la chute libre d'un objet.

## Équations générales du mouvement

Plaçons-nous dans l'hémisphère nord, en un lieu de latitude  $\lambda$ , et prenons les axes  $Ox$  vers le sud,  $Oy$  vers l'est,  $Oz$  suivant la verticale ascendante, ces axes portant les vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (figure 2).

Les composantes de  $\vec{\Omega}$  sont  $(-\Omega \cos\lambda, 0, \Omega \sin\lambda)$  celles de  $\vec{v}$  sont  $v_x, v_y, v_z$ , de sorte que l'accélération de Coriolis est le vecteur :

$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2\Omega \sin\lambda \cdot v_y \vec{i} - (2\Omega \sin\lambda v_x + 2\Omega \cos\lambda v_z) \vec{j} + 2\Omega \cos\lambda v_y \vec{k} \quad (1)$$

L'équation (1) s'écrit donc, sachant que les composantes de  $\vec{g}$  sont  $(0, 0, -g)$

$$\begin{aligned} a_x &= 2\Omega \sin\lambda v_y \\ a_y &= -2\Omega \sin\lambda v_x - 2\Omega \cos\lambda v_z \\ a_z &= -g + 2\Omega \cos\lambda v_y \end{aligned} \quad (2)$$

Ce système d'équations ne peut pas être résolu rigoureusement. On ne peut le résoudre qu'en première approximation, comme nous allons le voir par un certain nombre d'exemples.

## Chute libre

Un objet est lâché sans vitesse initiale d'une altitude  $h$  (figure 2).

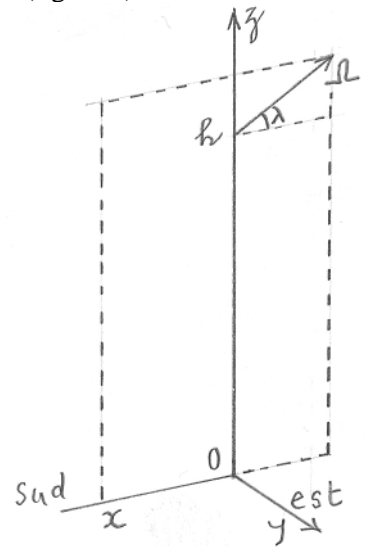


Figure 2

Au début, l'objet tombant à la verticale, c'est la composante horizontale de  $\vec{\Omega}$  qui compte dans l'accélération de Coriolis : l'accélération correspondante est parallèle à  $Oy$  : déviation vers l'est. Puis, dès que  $\vec{v}$  est dans le plan  $(Oy, Oz)$ , l'accélération de Coriolis a une composante  $v_y$  non nulle, vers le sud. Donc la déviation a lieu vers le sud-est.

Quand le mouvement continue, l'accélération de Coriolis change de direction, accompagnant le changement de direction de  $\vec{v}$  : l'objet tombe donc en tourbillonnant.

En première approximation, le mouvement est une chute verticale d'accélération  $a_z = -g$  et de vitesse  $v_z = -gt$  : les composantes  $v_x$  et  $v_y$  sont négligeables devant  $v_z$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} a_y &= 2\Omega \cos\lambda g t, \\ \text{d'où} \\ v_y &= \Omega \cos\lambda g t^2, \end{aligned}$$

relation qu'on porte dans l'équation donnant  $a_x$ . Enfin le second terme de  $a_z$  est négligeable devant  $g$ . Le système (2) prend donc une forme simple :

$$a_x = \Omega^2 \sin 2\lambda g t^2$$

$$a_y = 2 \Omega \cos \lambda g t$$

$$a_z = -g$$

Par ces simplifications, on a transformé un système de trois équations, en un groupe de trois équations indépendantes. En intégrant deux fois on obtient :

$$x = \Omega^2 \sin 2\lambda g t^4 / 12$$

$$y = \Omega \cos \lambda g t^3 / 3$$

$$z = h - (g/2)t^2$$

$x$  et  $y$  étant positifs, il y a une déviation vers le sud-est. De l'équation donnant  $z$  on tire :

$$t = (2d/g)^{1/2},$$

$d$  étant la distance parcourue ( $h - z$ ). Portons cette valeur dans les équations de  $x$  et de  $y$  :

$$x = \Omega^2 \sin 2\lambda d^2 / (3g)$$

$$y = 2^{3/2} \Omega \cos \lambda d^{3/2} / (3 g^{1/2}) \quad (3)$$

Comparons à l'expérience. En 1831, Reich a fait des expériences de chute libre dans un puits de mine à Freyberg, en Allemagne ( $\lambda = 51^\circ$ ,  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ), la hauteur de chute étant de 158 m. Il a fait 106 expériences et a trouvé des déviations vers l'est comprises entre 2,69 cm et 2,87 cm ; pas de déviation observable vers le sud.

Pour cette expérience, le calcul donne

$$x = 0,0000044 \text{ m}, \text{ absolument négligeable}$$

$$y = 0,0274 \text{ m}$$

Donc les résultats du calcul sont en bon accord avec l'observation.

Notons la petitesse de la déviation : même pas 3 cm pour 158 m de chute !

La figure 3 montre la chute dans le plan  $Oy, Oz$ , calculée dans les conditions suivantes  $\lambda = 49^\circ$ ,  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $h = 155 \text{ m}$ .

Pour une chute  $AO$  de 155 m, la déviation  $OB$  vers l'est est de 2,78 cm.

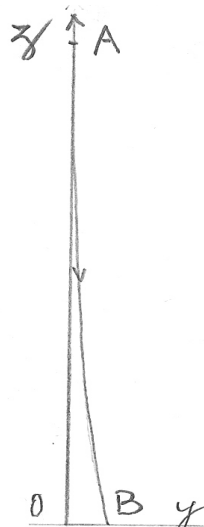


Figure 3

On voit par l'équation (3) que la déviation vers l'est est d'autant plus grande que l'accélération  $g$  est petite. On peut se placer dans de telles conditions à l'aide de la célèbre machine d'Atwood : c'est ce qu'a fait en 1912 le Père Hagen, directeur de l'observatoire du Vatican <sup>(4)</sup>. Grâce à cette amplification de la déviation, il a pu étudier des chutes de hauteur faibles (27 m seulement), qui ont en tous points confirmé le modèle théorique.

Notons aussi à ce sujet que le frottement de l'air ralentit la chute ; le calcul montre que dans ces conditions la déviation vers l'est est plus grande que dans le vide.

On pourrait même envisager des chutes de billes dans des liquides visqueux : la chute se faisant à vitesse constante (la vitesse limite), on se trouverait dans un cas similaire au mouvement des électrons dans un champ magnétique constant : trajectoire en spirale !

## Projectiles lancés verticalement

Nous avons vu que le déplacement dans la direction  $Ox$  est négligeable, nous n'en tenons donc pas compte ici.

Si la vitesse de lancement vers le haut est  $v_0$ , on a  $v_z = -g t + v_0$ . Portons ce  $v_z$  dans  $a_y$  du système (2), celui-ci s'écrit simplement

$$a_y = -2 \Omega \cos \lambda (v_0 - g t)$$

$$a_z = -g$$

ce qui donne :

$$y = \Omega \cos \lambda g t^3 / 3 - \Omega \cos \lambda v_0 t^2$$

$$z = -1/2 g t^2 + v_0 t$$

Lançons l'objet avec une vitesse  $v_0 = 55,146 \text{ m/s}$  pour qu'il atteigne une hauteur de 155 m. On obtient :

$$y = 1,56 \cdot 10^{-4} t^3 - 0,00264 t^2$$

$$z = -4,905 t^2 + 55,146 t$$

La trajectoire est représentée par la figure 4a.

Au sommet, à 155 m au dessus du sol, il n'y a pas de point de rebroussement. L'objet retombe, à 11,2 cm à l'ouest de son point de départ : la déviation  $OB'$  est quatre fois celle de la déviation de la chute libre pour une même hauteur  $h$ . La bille retombe au sol verticalement. Si alors elle rebondit sur le sol horizontal, et si le choc est élastique, elle décrira une nouvelle arche, et ainsi, de rebond en rebond, pourra se déplacer très notablement vers l'ouest. Elle fera le tour du parallèle terrestre en 13 ans 3 mois 14 jours.

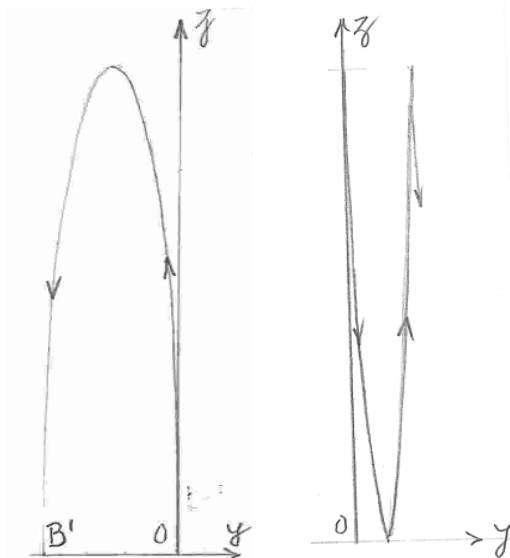


Figure 4 a

Figure 4b

## Rebond après la chute libre

Reprenons l'expérience du paragraphe 3. Pour une hauteur de chute de 155 m, les composantes de la vitesse en arrivant au sol sont  $v'_y = 0,0148 \text{ m/s}$  et  $v'_z = -55,1461 \text{ m/s}$ . Si la bille rebondit élastiquement sur le sol sa vitesse au moment du rebond aura les composantes  $v_{0y} = 0,0148 \text{ m/s}$  et  $v_{0z} = 55,1461 \text{ m/s}$ .

En prenant l'origine au point de départ du rebond, nous avons en première approximation  $v_y = v_{0y}$  et  $v_z = -gt + v_{0z}$ . Portons ces deux relations dans  $a_y$  et  $a_z$  du système (2) et intégrons, nous obtenons :

$$y = \Omega \cos\lambda \frac{g}{3} t^3 - \Omega \cos\lambda v_{0z} t^2 + v_{0y} t$$

$$z = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0z} t$$

soit, avec les valeurs numériques indiquées

$$y = 0,0001564 t^3 - 0,002636 t^2 + 0,148 t$$

$$z = -4,905 t^2 + 55,1461 t$$

La trajectoire est la courbe (b) de la figure 4. La montée est symétrique de la descente. Cette fois il y a au sommet de la trajectoire un point de rebroussement. Mêmes commentaires qu'au paragraphe précédent au sujet de rebonds éventuels.

## Comment lancer un objet pour qu'il retombe à son point de départ

C'est le problème du bilboquet. Soient  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  et  $v_{0z}$  les composantes de la vitesse de tir initiale. En première approximation on a donc

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y}, \quad v_z = -gt + v_{0z}$$

Portons ces expressions dans les trois équations du système (2) et intégrons, nous obtenons

$$x = \Omega \sin\lambda v_{0y} t^2 + v_{0x} t$$

$$y = \Omega \cos\lambda \frac{g}{3} t^3 - \Omega \cos\lambda v_{0z} t^2 + v_{0y} t$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$$

Nous voulons que la hauteur atteinte soit de 155 m, on a donc  $v_{0z} = 55,1461 \text{ m/s}$ , et le temps total de vol est de 11,243 s. Portons ces deux valeurs dans la deuxième équation ci-dessus et faisons  $y = 0$ , cela nous donne  $v_{0y} = 0,009887 \text{ m/s}$ .

Portons cette valeur de  $v_{0y}$  dans la première équation ci-dessus, et faisons  $x = 0$ , nous obtenons  $v_{0x} = -6,117 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ ; cette vitesse étant plus de mille fois plus petite que  $v_{0y}$ , nous pouvons négliger le mouvement suivant  $Ox$

On a ainsi :

$$y = 0,000156 t^3 - 0,00264 t^2 + 0,009887 t$$

$$z = -4,905 t^2 + 55,1461 t$$

La figure 5 représente cette trajectoire : pour que le projectile retombe à son point de départ, il faut tirer légèrement vers l'est (la vitesse de départ doit faire avec la verticale un angle de  $37''$ ).

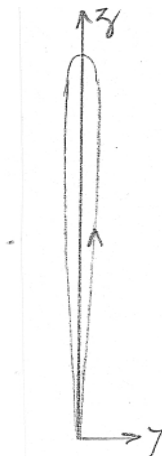


Figure 5

## Références

- (1) Acloque P. (1982) "Histoire des expériences pour la mise en évidence du mouvement de la Terre". Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, n° 4.
- (2) Gapaillard J. (1993) "Et pourtant, elle tourne. Le mouvement de la Terre". Seuil.
- (3) Bruhat G. (1940) Cours de Mécanique, Masson.
- (4) Hagen J. (1912) "How Atwood's machine shows the rotation of the earth even quantitatively". International congress of mathematicians, Cambridge, august 1912

■