COURS

Trigonométrie sphérique : II distance angulaire entre deux astres

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *Nous avons vu la dernière fois les bases de la trigonométrie sphérique, avec une application au calcul de la distance zénithale d'un astre. Nous présentons maintenant une nouvelle application : le calcul de la distance angulaire entre deux astres de coordonnées connues.*

Introduction

La nouvelle application de la trigonométrie sphérique que nous présentons aujourd'hui sera très utile à l'observateur qui veut savoir, par exemple, à quelle distance de la Lune ou du Soleil se trouve un astre donné. Même pour l'observation "en chambre" avec un logiciel comme Stellarium (voir l'article de J.-N. Terry dans ce numéro), il peut être intéressant de calculer la distance qui sépare deux étoiles (nous aurons bientôt l'occasion de voir un exemple pratique avec un tel logiciel). C'est une application simple qui utilise directement une des relations du Groupe de Gauss, vu dans l'article précédent.

Posons le problème

Sur la surface de notre sphère céleste de rayon unité, nous avons deux astres E_1 et E_2 de coordonnées équatoriales (α_1, δ_1) et (α_2, δ_2) respectivement. Notons que le calcul serait identique avec d'autres coordonnées, mais les coordonnées équatoriales sont les plus communément utilisées dans les catalogues.

La figure 1 illustre la situation. Le point P donne la direction du pôle Nord terrestre ; le plan horizontal est le plan de l'équateur, perpendiculaire à la direction des pôles. L'origine des ascensions droites est le point γ, situé sur l'intersection du plan de l'équateur et du plan de l'écliptique (non représenté sur la figure) dans la direction où le Soleil passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord, dans sa course apparente autour de la Terre (c'est ce qu'on appelle le nœud ascendant car la déclinaison du Soleil y est nulle mais croissante).

Nous cherchons à calculer l'arc de grand cercle (E_1,E_2) qui mesure la séparation angulaire des deux astres. Les déclinaisons sont mesurées par rapport au plan équatorial, de -90° à +90°. Les ascensions droites sont mesurées dans le plan équatorial, dans le sens direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre), de 0h à 24 h, à partir du point γ.

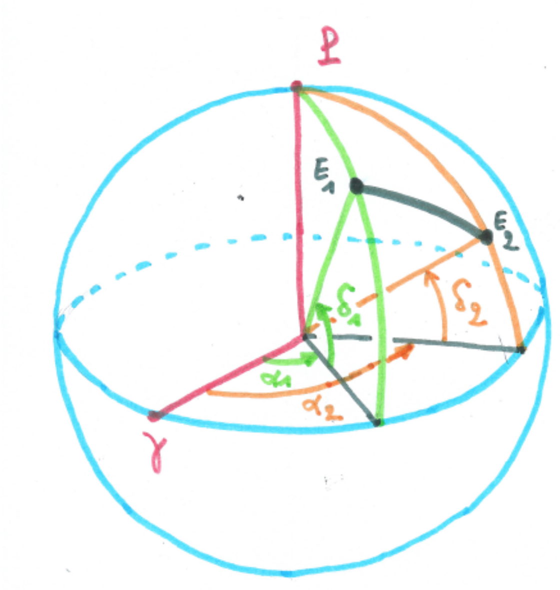
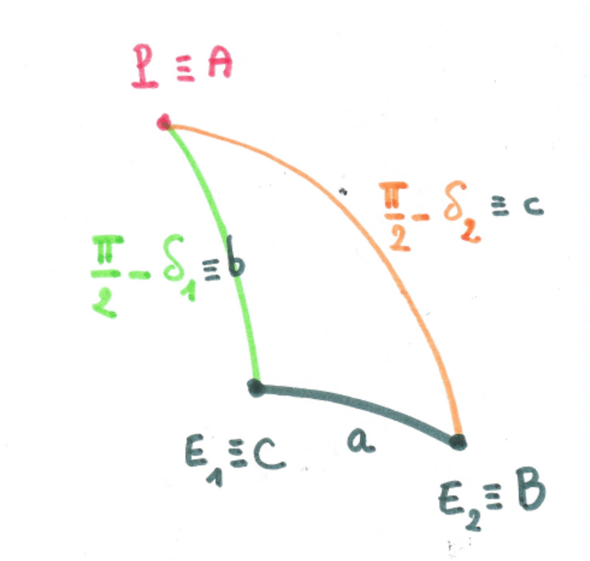


Figure 1 : Deux astres E_1 et E_2 sont repérés en coordonnées équatoriales(α_1, δ_1) et (α_2, δ_2) respectivement. Nous cherchons à calculer l'arc de grand cercle (E_1,E_2)

Résolution du triangle sphérique

Nous allons résoudre le triangle sphérique PE_1E_2 pour déduire l'arc (E_1,E_2). Traçons le triangle sphérique en question en identifiant les sommets avec les notations standards du cours précédent.



Appliquons la troisième relation du groupe de Gauss (relation G3)

cos$a$ = cosb.cosc+sinb.sinc.cosA

En remplaçant b par $(\pi/2 - \delta_1)$, c par $(\pi/2 - \delta_2)$ et en notant que l'angle au sommet A n'est autre que $(\alpha_2 - \alpha_1)$, on obtient la relation qui donne directement le cosinus de a, l'arc cherché :

$$\cos a = \sin\delta_1.\sin\delta_2 + \cos\delta_1.\cos\delta_2.\cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Notez que la différence des ascensions droites $\alpha_2 - \alpha_1$ n'intervenant que par le cosinus, son signe n'a pas d'importance. Vous pouvez prendre $\alpha_2 - \alpha_1$ tout aussi bien.

Reste à tirer la valeur de a de la valeur de son cosinus. Il suffit de prendre la fonction arc-cosinus pour trouver l'arc dont le cosinus vaut cos$a$.

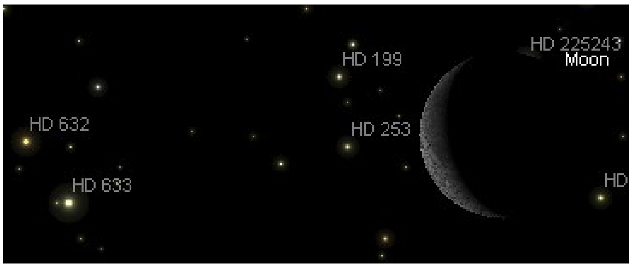
L'arc-cosinus est compris entre 0 et π, bornes comprises. L'arc (E_1,E_2) calculé sera le plus petit arc. En effet, nous pourrions vouloir calculer le grand arc, en considérant l'autre partie du grand cercle. Bien que l'intérêt pratique soit discutable, nous l'obtiendrons simplement par $2\pi - a$.

Applications concrètes

Nous commencerons par vérifier les cas triviaux pour nous assurer que les résultats sont cohérents : Entre le pôle nord (δ_1=90°) et une étoile à l'équateur (δ_2=0°), quelle que soit l'ascension-droite α, l'application de la relation donne *cosa=0*, donc *a=90°*, ouf[1] !

Enfin, la distance entre le pôle nord (δ=90°) et le pôle sud (δ=–90°), quelle que soit α, conduit à *cosa=–1*, c'est-à-dire *a=180°*. Nous sommes heureux !

Venons en à un cas moins trivial. Je vous montre une photo de la Lune dérivée de mon logiciel de simulation (en l'occurrence Skychart, mais vous pourriez le faire avec Stellarium).



Vous voyez la Lune le 13 mai 2007. En 2h10min, la position apparente de la Lune va se déplacer de l'étoile HD253 jusqu'à l'étoile HD633. Quel a été son déplacement angulaire réel ?

Les coordonnées équatoriales des étoiles sont (pour 2007) :

HD253 : α_1=*0h 07min 42s* ; δ_1=*1° 42' 22"*

HD633 : α_2=*0h 11min 03s* ; δ_2=*2° 05' 47"*

Convertissons les angles sexagésimaux en degrés décimaux.

On trouve :

HD253 : α_1=*0,12833h=1,9250°* ; δ_1=*1,7061°*

HD633 : α_2=*0,18417h=2,7625°* ; δ_2=*2,0964°*

L'application de notre relation conduit alors simplement à : *cosa=0,99987* c'est-à-dire : *a=0,923562° =0° 55' 24,8"*.

Comment savoir si ce calcul est exact ? La période sidérale de la Lune étant de 26,3 jours, on en déduit facilement que, en 2h10min, la Lune devrait se déplacer de 1,1895°. L'ordre de grandeur est correct. Mais d'où vient la différence ? Nous verrons prochainement que c'est un effet de parallaxe dont nous pourrons tirer la distance Terre-Lune par la méthode de Ptolémée.

■

[1] Rappelez-vous que l'arc-cosinus est compris entre 0 et 90°. La solution –90° est donc exclue, bien que son cosinus vaille zéro.