COURS

Trigonométrie sphérique

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *La trigonométrie sphérique n'est pas la discipline la plus attrayante de l'astronomie. Mais c'est une discipline indispensable pour faire certains calculs. Sans avoir la prétention de faire un cours complet sur le sujet, nous donnons les éléments utiles pour résoudre les principaux problèmes que nous pouvons rencontrer en astronomie : le calcul de la distance zénithale ou la séparation angulaire de deux astres de coordonnées données. Nous donnerons donc le minimum à savoir.*

Introduction

Le repérage des astres s'effectue sur la sphère céleste. C'est comme si tous les astres étaient à la même distance de l'observateur situé au centre d'une sphère virtuelle. La distance n'intervient pas. Nous pouvons donc supposer que le rayon de cette sphère vaut un. Seules les mesures angulaires seront accessibles. Commençons par quelques définitions.

Grands cercles et petits cercles

Sur la surface de notre sphère céleste de rayon unité, nous pouvons tracer deux sortes de cercles : les cercles de rayon un (nous les appellerons les grands cercles) et les cercles de rayon inférieur à un (les petits cercles). Les grands cercles sont les plus importants. Ils ont la propriété simple d'avoir un centre confondu avec le centre de la sphère[1]. La figure 1 vous donne un aperçu intuitif de ce que sont un grand cercle et un petit cercle.

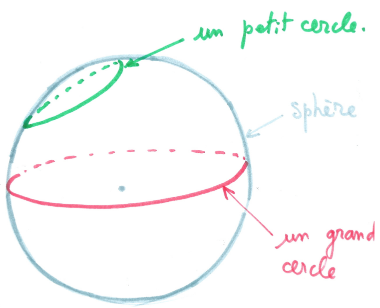

Figure 1 : Grand cercle et petit cercle. Nous utiliserons surtout les grands cercles.

[1] Du point de vue axiomatique et différentiel, ils jouent le rôle des droites de la géométrie euclidienne plane. MB

Coordonnées sphériques

En mathématiques, quand nous avons à repérer un point dans l'espace nous pouvons utiliser le repère (x,y,z), dit cartésien. Trois nombres (X, Y, et Z mesurés sur les axes x, y et z respectivement) permettent de repérer n'importe quel point M de l'espace. Nous pouvons utiliser aussi les coordonnées sphériques. N'importe quel point de l'espace est alors repéré par trois grandeurs : une distance et deux angles : r, θ et φ respectivement (figure 2). Tous les points de l'espace peuvent être balayés quand φ varie de 0 à 360°, θ de -90° à 90° et r de 0 à l'infini. Vous pouvez vous convaincre facilement que chaque point de l'espace correspond à un triplet (r,θ,φ) unique (à quelques nuances près).

Nous prendrons dorénavant r=1, puisque seuls les points sur la sphère de rayon un nous intéressent. Calculons les coordonnées cartésiennes du point M de coordonnées sphériques r,θ, φ.

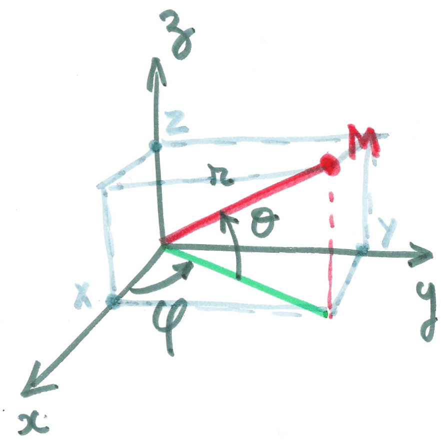

Figure 2 : Coordonnées sphériques

Exprimons les coordonnées X, Y, Z du point M en fonction de r, θ, φ. Nous avons par projection (et compte tenu du fait que r=1):

$$X = \cos\theta \,.\cos\varphi$$
$$Y = \cos\theta \,.\sin\varphi$$
$$Z = \sin\theta$$

Retenez bien cette transformation (xyz en $\theta\varphi$), nous en aurons besoin un peu plus loin.

Triangles sphériques

Entrons dans le vif du sujet. Nous appellerons triangle sphérique *simple*, la figure comprise entre trois arcs de grands cercles et telle que chaque angle

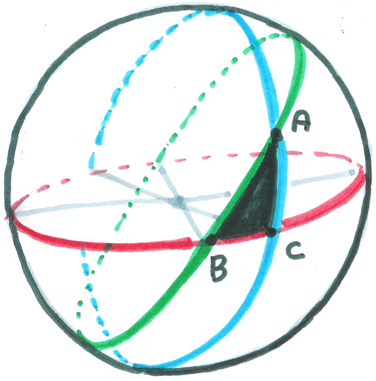

Figure 3 : Exemple d'un triangle sphérique ABC défini par trois grands cercles.

au sommet (angle entre les plans des deux grands cercles définissant le sommet considéré) est inférieur à 180°. Il est plus facile de voir sur une figure ce que cela signifie (Figure 3).

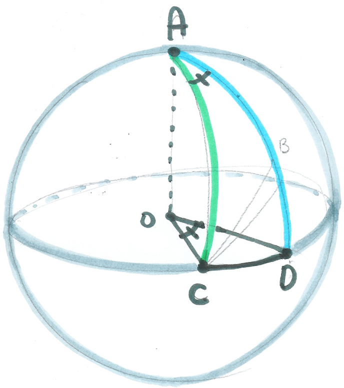

Figure 4 : Définition d'un angle d'un triangle sphérique

On constate que l'angle A (en rad.) est aussi la mesure de l'arc CD puisque la sphère est de rayon unité.

On remarque une différence fondamentale entre les triangles sphériques et les triangles plans : la somme de leurs angles n'est pas 180°. Le triangle ACD de la figure précédente, par exemple, a deux angles droits, en C et en D, et un angle aigu, l'angle A.

Nous adopterons toujours la convention suivante : les angles seront désignés par des lettres majuscules (A, B, C). La longueur de l'arc de cercle définissant le côté opposé à un angle sera désignée par la lettre utilisée pour l'angle, mais en minuscule. Là encore, c'est facile à comprendre sur une figure.

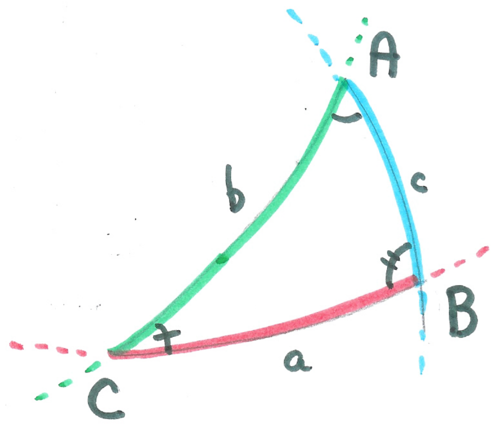

Figure 5 : Notations des angles et des côtés

Nous allons établir les relations qui permettent de résoudre pratiquement tous les problèmes que l'on rencontre en astronomie. C'est ce qu'on appelle le **groupe de Gauss[2].** Ce que nous allons voir s'appliquera aux triangles sphériques simples dont chaque angle est inférieur à 180°.

Le groupe de Gauss

Considérons un triangle sphérique ABC. Choisissons un repère cartésien xyz de centre O, d'axe Oz passant par A, et dont le plan zOy contienne B.

Nous allons considérer un second repère x'y'z' de même centre O, mais tel que l'axe Oz' passe par B et que le plan z'Oy' soit encore identique au plan zOy. Nous passons ainsi de l'axe Oz à l'axe Oz' (ou de l'axe Oy à l'axe Oy') par une rotation d'un angle c autour de l'axe Ox, identique à Ox'. La mesure de l'arc AB est égale à c.

Si vous avez bien suivi ces préliminaires, vous devriez pouvoir comprendre facilement la figure (Fig. 6) qui va suivre et qui est très importante pour la démonstration. Le reste ne sera que du calcul.

Dans le repère Oxyz, le point C a les coordonnées cartésiennes X,Y,Z (ou $1,\theta_c,\varphi_c$ en coordonnées

[2] le mot "groupe" n'est pas pris au sens mathématique (comme le "groupe de Lorentz") mais au sens courant.

sphériques) et X',Y',Z' (ou $1, \theta'_c, \varphi'_c$ en coordonnées sphériques) dans le repère Ox'y'z'. Les angles φ_c et φ'_c sont mesurés par rapport à l'axe Ox dans le sens marqué + sur la figure.

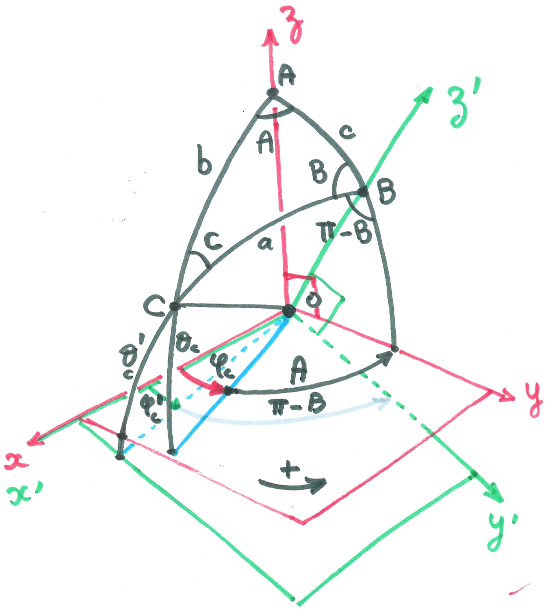

Figure 6 : Les deux repères clefs

Passage d'un système à l'autre

Le groupe de Gauss va se déduire du passage des coordonnées Oxyz aux coordonnées Ox',y',z' par une rotation d'angle c=arc(AB) (voir l'encadré) :

X'=X

Y'=Y.cosc –Z.sinc

Z'=Y.sinc + Z.cosc

Les coordonnées sphériques de C, dans les deux systèmes, peuvent s'exprimer en fonction des côtés et des angles du triangle ABC. Ils prennent les valeurs suivantes :

$\theta_c = \pi/2 - b$ (complément de b ; cf. figure 6)

$\theta'_c = \pi/2 - a$ (complément de a ; cf. figure 6)

$\varphi_c = \pi/2 - A$ (car $\varphi'_c + \pi - B = \pi/2$; cf. figure 6)

$\varphi'_c = B - \pi/2$ (car $\varphi'_c + \pi - B = \pi/2$; cf. figure 6)

Passons, comme nous l'avons fait plus haut en coordonnées sphériques, mais en prenant en compte les égalités ci-dessus. Nous obtenons :

$X' = \cos\theta'_c.\cos\varphi'_c = \sin a.\sin B$

$Y' = \cos\theta'_c.\sin\varphi'_c = -\sin a.\cos B$

$Z' = \sin\theta'_c = \cos a$

et

$X = \cos\theta_c.\cos\varphi_c = \sin b.\sin A$

$Y = \cos\theta_c.\sin\varphi_c = \sin b.\cos A$

$Z = \sin\theta_c = \cos b$

Il ne reste plus qu'à remplacer ces coordonnées dans les relations de passage. On obtient les relations suivantes :

sina.sinB = sinb.sinA	G1
sina.cosB = cosb.sinc – sinb.cosc.cosA	G2
cosa = cosb.cosc+sinb.sinc.cosA	G3

Ces relations seront ultérieurement notées par G1, G2 et G3 et globalement désignées par "groupe de Gauss"..

Rotation d'un système de référence.

Soient les repères *yOz* et *y'Oz'*, de même centre *O*. On passe de y à y', ou de z à z', par une rotation d'angle c.

Un vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire indifféremment :

$$\overrightarrow{OM} = Y\vec{i} + Z\vec{j} = Y'\vec{i}' + Z'\vec{j}'$$

où les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires de base du repère *yOz* et *Y* et *Z* sont les coordonnées du point *M*. Les mêmes notations sont à transposer pour le repère *y'Oz'*.

Multiplions scalairement par $\vec{i}'$. Nous obtenons :

$$\overrightarrow{OM}.\vec{i}' = Y\vec{i}.\vec{i}' + Z\vec{j}.\vec{i}' = Y'\vec{i}'.\vec{i}' + Z'\vec{j}'.\vec{i}'$$

or le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est égal au cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs. On a donc :

$$\vec{i}.\vec{i}' = \cos c$$

$$\vec{j}.\vec{i}' = \cos(\pi/2 + c) = -\sin c$$

$$\vec{i}'.\vec{i}' = 1$$

$$\vec{j}'.\vec{i}' = 0$$

On déduit donc :

$$Y\cos c - Z\sin c = Y'$$

En multipliant scalairement notre première relation par $\vec{j}'$ on aurait trouvé de manière similaire que

$$Y.\sin c + Z.\cos c = Z'$$

On abrège parfois ce changement de repère sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c \\ \sin c & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Première application

Nous allons faire un calcul qui est très utilisé par les astronomes pour savoir si un astre est facilement observable. Ce qui conditionne la facilité d'observation est la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon, ou, dit autrement, sa distance zénithale. Si la distance zénithale est trop importante (disons plus grande que 60°), la lumière doit traverser une grande épaisseur d'atmosphère. L'astre est fortement atténué par l'absorption atmosphérique.

Représentons la sphère céleste dans le système de l'observateur, c'est-à-dire avec le zénith Z à la verticale du lieu. Le plan horizontal est tout simplement l'horizon de l'observateur (en bleu). Représentons le plan équatorial (en rouge). Le pôle équatorial nord est à une certaine distance du zénith qui dépend de la latitude du lieu. Pour être plus précis cette distance vaut $arc(PZ) = \pi/2 - \varphi$, où φ est la latitude du lieu d'observation.

Enfin, plaçons une étoile E. Sa distance zénithale est l'arc ZE. La déclinaison de l'étoile (hauteur au-dessus du plan équatorial) est Ee (voir l'article sur le théodolite p.20).

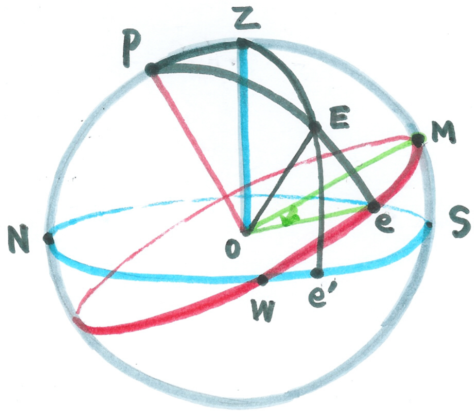

Figure 7 : Coordonnées horizontales locales et équatoriales

L'angle MOe s'appelle l'angle horaire. Il est compté dans le sens des aiguilles d'une montre de 0 à 24h. Que représente-t-il en pratique ? C'est très simple. C'est la position de votre télescope par rapport au méridien (plan PZMS donnant la direction du sud). En général on essaye de pointer les astres près du méridien, car c'est là qu'ils sont le plus haut possible. Rappelons que le méridien correspond au point où le temps sidéral est égal à l'ascension droite de l'astre. Par exemple, si vous avez une étoile d'ascension droite α=13h36min, elle passera au méridien au temps sidéral t=13h36min.

Revenons à notre distance zénithale en représentant de manière agrandie le triangle sphérique PEZ. En rouge nous avons mis les notations équivalentes.

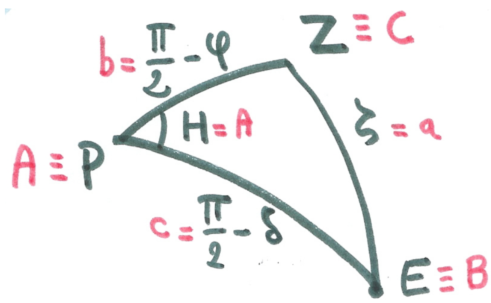

Figure 8 : Le triangle sphérique à résoudre

Appliquons la relation G3 à notre triangle sphérique ABC, alias PEZ :

$$\cos\zeta = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\cos(\frac{\pi}{2}-\delta) + \sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}-\delta).\cos H$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{\cos\zeta = \sin\varphi.\sin\delta + \cos\varphi.\cos\delta.\cos H}$$

Vérification

Prenons le cas d'une étoile de déclinaison δ=20°, observée depuis l'Observatoire de Haute Provence (φ=43°56'). Quelle sera sa distance zénithale ζ quand elle sera située deux heures avant ou après le méridien ($|H| = 2\text{ h} = 30°$) ?

Le calcul est aisé...
Je vous laisse le faire. On trouve : $\cos\zeta = 0{,}823$
soit : ζ=34,6°

Dans la pratique astronomique, on utilise beaucoup la fonction 1/cosinus. On l'appelle la fonction sécante (*séc*). Elle sert par exemple pour évaluer l'absorption atmosphérique (pour les angles ζ inférieurs à 60° on la confond avec la masse d'air, ou épaisseur relative d'atmosphère traversée).
Dans notre exemple $séc\zeta = 1{,}215$.

Avant les calculettes et les ordinateurs, les astronomes utilisaient des abaques pour obtenir $séc\zeta$. Nous reproduisons (Figure 9) celui qui était utilisé à l'OHP. Nous vérifierons que le résultat est correct pour l'exemple traité. Il suffit d'aligner avec une règle la valeur de |H|=2, de δ=20 et de lire $séc\zeta \approx 1{,}21$.

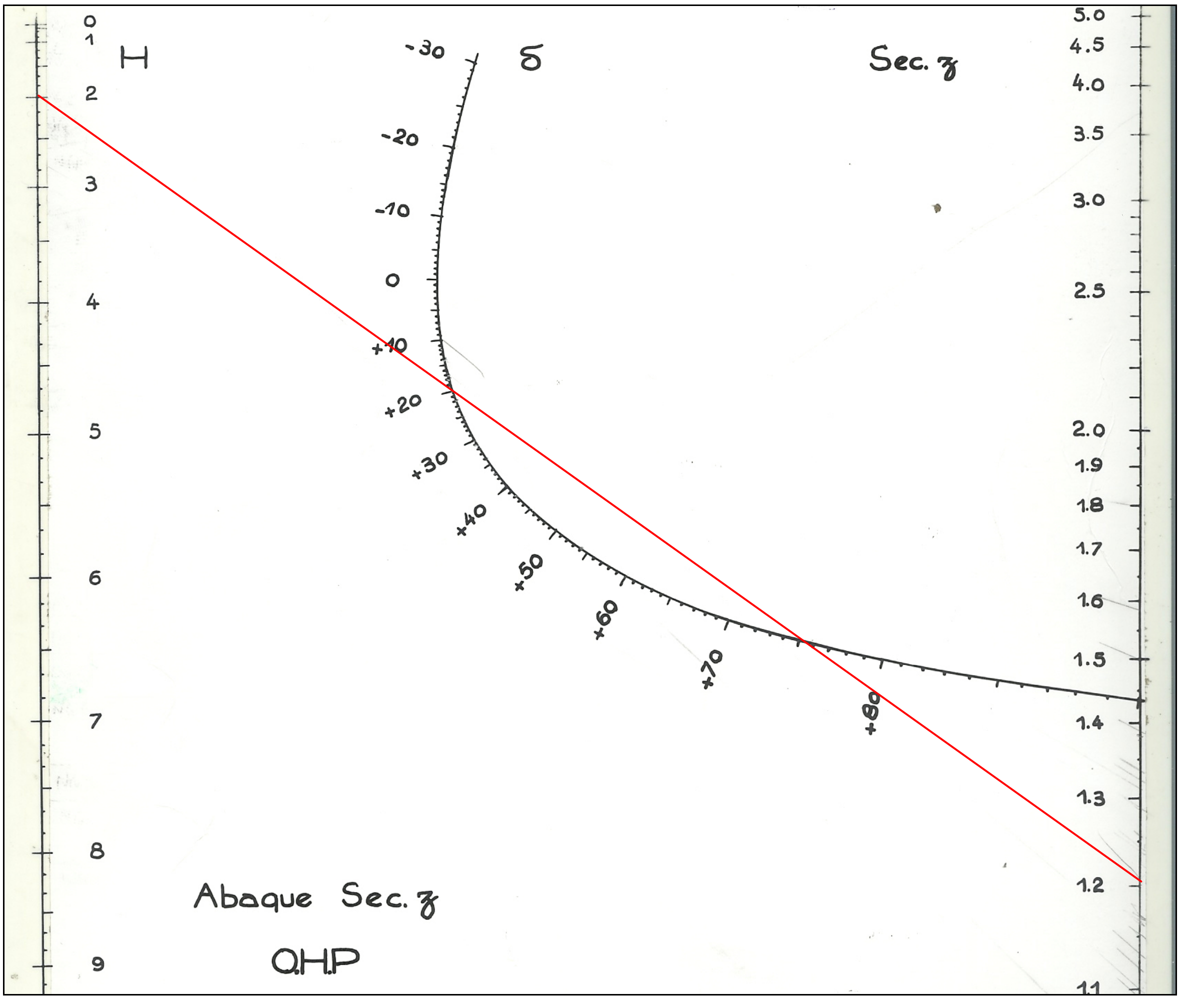

Figure 9 : Abaque utilisé, à l'Observatoire de Haute Provence dans les années 1970, pour calculer $\sec\zeta$ *pour un astre, à partir de sa déclinaison* δ *et de sa distance au méridien* $|H|$.

Bibliographie : (Ce cours s'est inspiré du cours non publié de J. Bergeat, UCB-Lyon1)
E. Schatzman : Astronomie sphérique, 1968, in "Encyclopédie de la Pléiade "Astronomie".
A. Danjon : Astronomie Générale, 1980, Librairie Scientifique et Technique - Albert Blanchard
M. Berger : Géométrie, 1977, CEDIC/Nathan

■

Au fil des perles des astronomes et des enseignants

Nous allons relater une anecdote qui s'est déroulée à l'OHP, précisément. Il se trouve que le personnage principal était le même que celui dont nous narrions l'aventure dans le précédent Cahier. Mais cela n'a aucune espèce d'importance. Nous étions à l'OHP et le temps était couvert. Pour occuper la nuit nous décidâmes d'aller visiter nos collègues restés dans leur coupole. La première visite fut faite à une jeune astronome parisienne. Nous parlâmes d'évolution de nuages gazeux. Mon collègue s'étonna : "vingt mille ans, c'est très court !".

Nous poursuivîmes notre visite au service informatique. Nous parlâmes électronique, temps de réponse, etc.. Là, ce même collègue conclut : "Le temps de réponse est très long. C'est au minimum une milliseconde". Allez comprendre ... On ne peut s'empêcher de penser à la réflexion de W.Allen "L'éternité c'est long, surtout à la fin".

GP