Solution de l'équation $ax^3=b$, par Clairaut

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *Voici donc les trois solutions de l'équation proposée dans le Cahier précédent, telles que Alexis Clairaut les trouve.*

Introduction

Dans son livre : "ÉLÉMENS D'ALGÈBRE" (sic), Clairaut se pose le problème de trouver les solutions de l'équation simple $ax^3=b$, que l'on écrira avec Clairaut : $x^3=b/a$. Il remarque que, cette équation étant du troisième degré, on est en droit d'attendre trois solutions. Or une solution simple s'impose :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Clairaut note qu'il n'y a pas d'ambiguïté de signe, comme ce serait le cas pour l'équation $x^2=b/a$. En d'autres termes, x est toujours du signe de b/a, car le cube d'une quantité négative est négatif et le cube d'une quantité positive est positif.

Est-ce une solution triple ? Existe-t-il d'autres solutions et si oui comment les trouver ?

C'est ce que nous allons découvrir en suivant les calculs de Clairaut.

La solution

On sait qu'une équation du troisième degré en x qui a trois racines r_1, r_2, r_3, peut s'écrire sous la forme très générale :

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0\,.$$

On le vérifie de manière évidente en donnant à x la valeur d'une des trois racines. Écrivons donc avec Clairaut l'équation sous la forme $x^3-c^3=0$ (ce qui signifie simplement que l'on a posé :

$$c = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Une solution étant : $x=c$, x^3-c^3 doit être divisible par $x-c$.

En effet, on vérifie aisément que :

$$\frac{x^3-c^3}{x-c} = x^2+cx+c^2$$

Les deux autres solutions cherchées sont donc les racines de :

$$x^2+cx+c^2=0\,.$$

On sait résoudre les équations du second degré. Les deux solutions sont :

$$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}c^2}$$

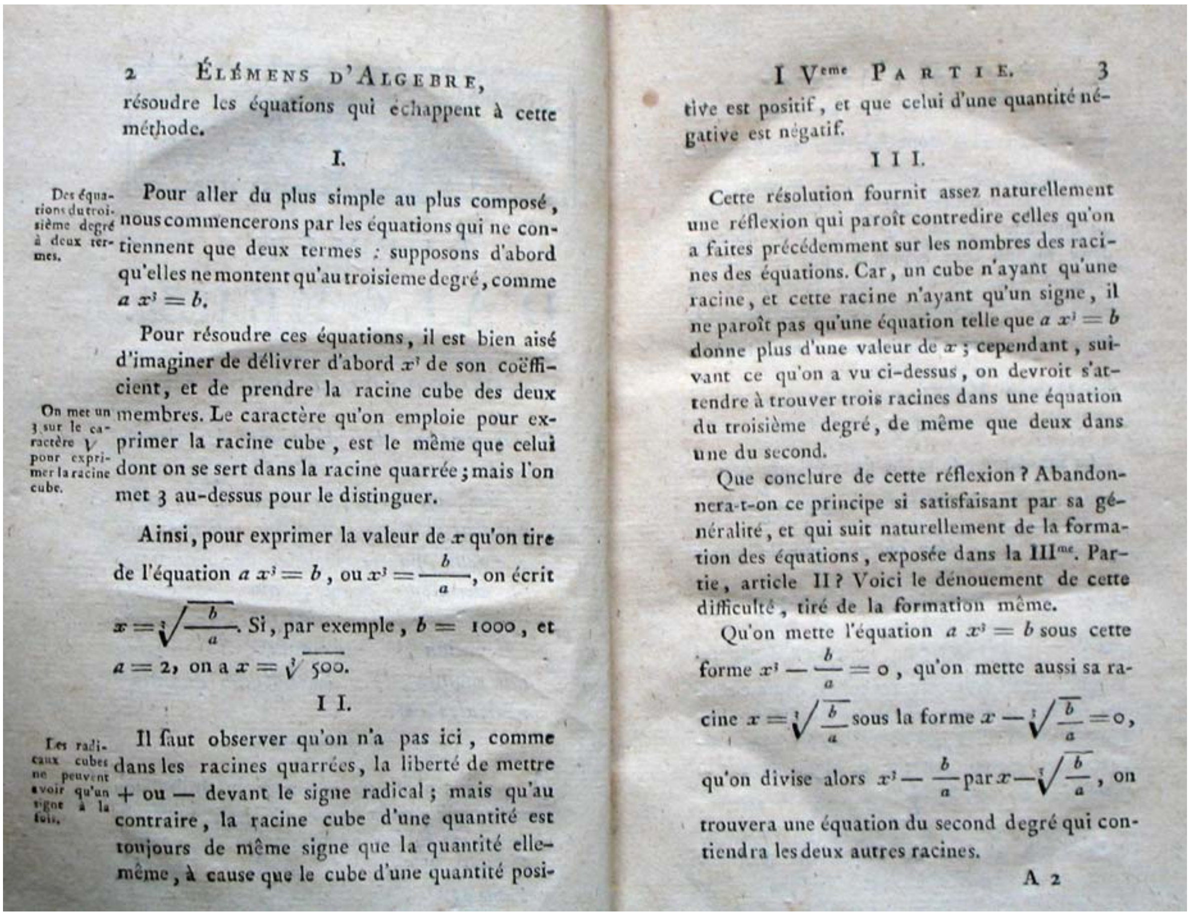
Donc finalement les trois solutions de l'équation $ax^3=b$ sont les suivantes (après que l'on ait remplacé c par sa valeur) :

$$x = +\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

et

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Maintenant amusez-vous à lire Clairaut dans le texte. Vous verrez au passage que les savants avaient une curieuse façon de noter les puissances. C'est une forme que l'on retrouve dans certains langages pour ordinateurs ; il est en effet plus précis pour les machines de calculer $c \times c$ que c^2.



2 ÉLÉMENS D'ALGEBRE,

résoudre les équations qui échappent à cette méthode.

I.

Des équations du troisième degré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les équations qui ne contiennent que deux termes : supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisieme degré, comme $a x^3 = b$.

Pour résoudre ces équations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coëfficient, et de prendre la racine cube des deux membres. Le caractère qu'on emploie pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée ; mais l'on met 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractère $\sqrt{}$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi, pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'équation $a x^3 = b$, ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on écrit $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si, par exemple, $b = 1000$, et $a = 2$, on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il faut observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre + ou — devant le signe radical ; mais qu'au contraire, la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même, à cause que le cube d'une quantité posi-

IVeme PARTIE. 3

tive est positif, et que celui d'une quantité négative est négatif.

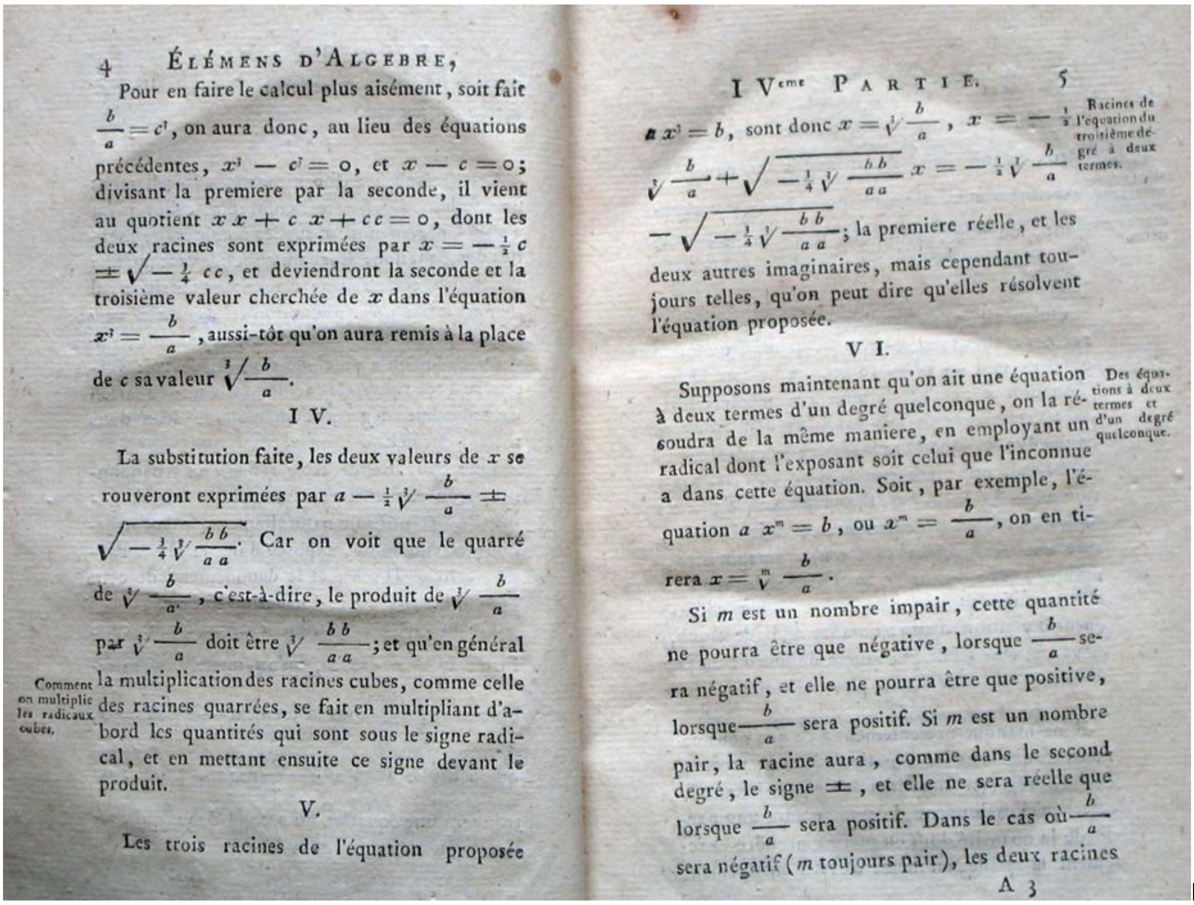
III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur les nombres des racines des équations. Car, un cube n'ayant qu'une racine, et cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une équation telle que $a x^3 = b$ donne plus d'une valeur de x ; cependant, suivant ce qu'on a vu ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une équation du troisième degré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion ? Abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, et qui suit naturellement de la formation des équations, exposée dans la IIIme. Partie, article II ? Voici le dénouement de cette difficulté, tiré de la formation même.

Qu'on mette l'équation $a x^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa racine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

A 2



4 ÉLÉMENS D'ALGEBRE,

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc, au lieu des équations précédentes, $x^3 - c^3 = 0$, et $x - c = 0$; divisant la premiere par la seconde, il vient au quotient $x x + c x + c c = 0$, dont les deux racines sont exprimées par $x = -\frac{1}{2} c \pm \sqrt{-\frac{3}{4} c c}$, et deviendront la seconde et la troisième valeur cherchée de x dans l'équation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

IV.

La substitution faite, les deux valeurs de x se trouveront exprimées par $a - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le quarré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; et qu'en général la multiplication des racines cubes, comme celle des racines quarrées, se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, et en mettant ensuite ce signe devant le produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Les trois racines de l'équation proposée

IVeme PARTIE. 5

$a x^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la premiere réelle, et les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles, qu'on peut dire qu'elles résolvent l'équation proposée.

Racines de l'équation du troisième degré à deux termes.

VI.

Des équations à deux termes et d'un degré quelconque.

Supposons maintenant qu'on ait une équation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même maniere, en employant un radical dont l'exposant soit celui que l'inconnue a dans cette équation. Soit, par exemple, l'équation $a x^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Si m est un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, et elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura, comme dans le second degré, le signe $\pm$, et elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair), les deux racines

A 3