AVEC NOS ELEVES

Mesures de distances : commençons par la Terre

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *Le but de cette série d'articles est de présenter les méthodes de détermination des distances astronomiques pour qu'elles soient compréhensibles par des élèves de collège ou de lycéesl. Des expériences simples sont proposées pour faciliter l'assimilation des principes et des explications approfondies sont données pour que l'enseignant puisse apporter des compléments aux élèves curieux.*

La méthode de triangulation

Cette méthode est celle qui permet de mesurer avec précision une grande longueur, par exemple sur Terre, dans le cas où la longueur à mesurer est bien supérieure à l'étalon de longueur et où il n'est pas possible de réaliser une ligne droite entre les différents points. C'est la méthode utilisée en géodésie. C'est par cette méthode que la forme de la Terre a été déterminée avec une grande précision pour trancher entre le modèle de Newton et celui de Descartes. Nous allons appliquer la méthode à la mesure de la longueur sur une feuille de papier. Etablissons la relation à utiliser :

Dans un triangle quelconque, nous désignerons par *a*, *b*, *c* les longueurs des côtés opposés aux angles *A*, *B* et *C*. Etablissons que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

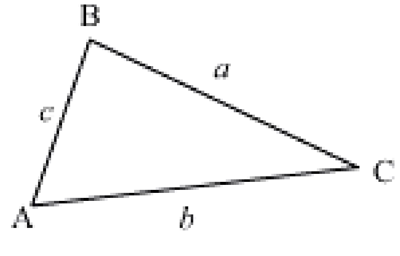
C'est très facile. Il suffit d'écrire les hauteurs du triangle comme produit d'un côté par un sinus.

Nous supposons que c est la 'base' de longueur connue et que seuls les angles A et B sont mesurables. Nous montrerons alors que :

$$a = \frac{c \sin A}{\sin(A+B)} \text{, et que : } b = \frac{c \sin B}{\sin(A+B)}$$

A partir de la figure 1 ci-dessous, calculons la longueur BF (supposée être un arc de méridien terrestre) en calculant successivement L1 et L2 à partir de la longueur c et des angles 1 et 2, puis L3 et L4 à partir de L2 et des angles 3 et 4 et ainsi de suite, puis en projetant L1, L5 et L7 sur la ligne de méridien à partir de leurs angles respectifs par rapport au méridien. Pour confirmation on projettera aussi c, L4 et L8. On mesure ainsi une longueur en ne mesurant que des angles. On vérifiera avec un double décimètre à la fin du calcul.

Cet exercice un peu fastidieux nous fait apprécier la précision des astronomes, Bouguer et La Condamine, qui dans les années 1735 à 1771 mesurèrent un arc de méridien sous-tendu par un angle de un degré, près de l'équateur, au Pérou. La longueur était de 110 kilomètres et les astronomes firent la mesure avec une trentaine de triangles. Ils réussirent à obtenir une précision de l'ordre de 22 mètres sur la longueur totale, soit une précision relative de deux dix millièmes.



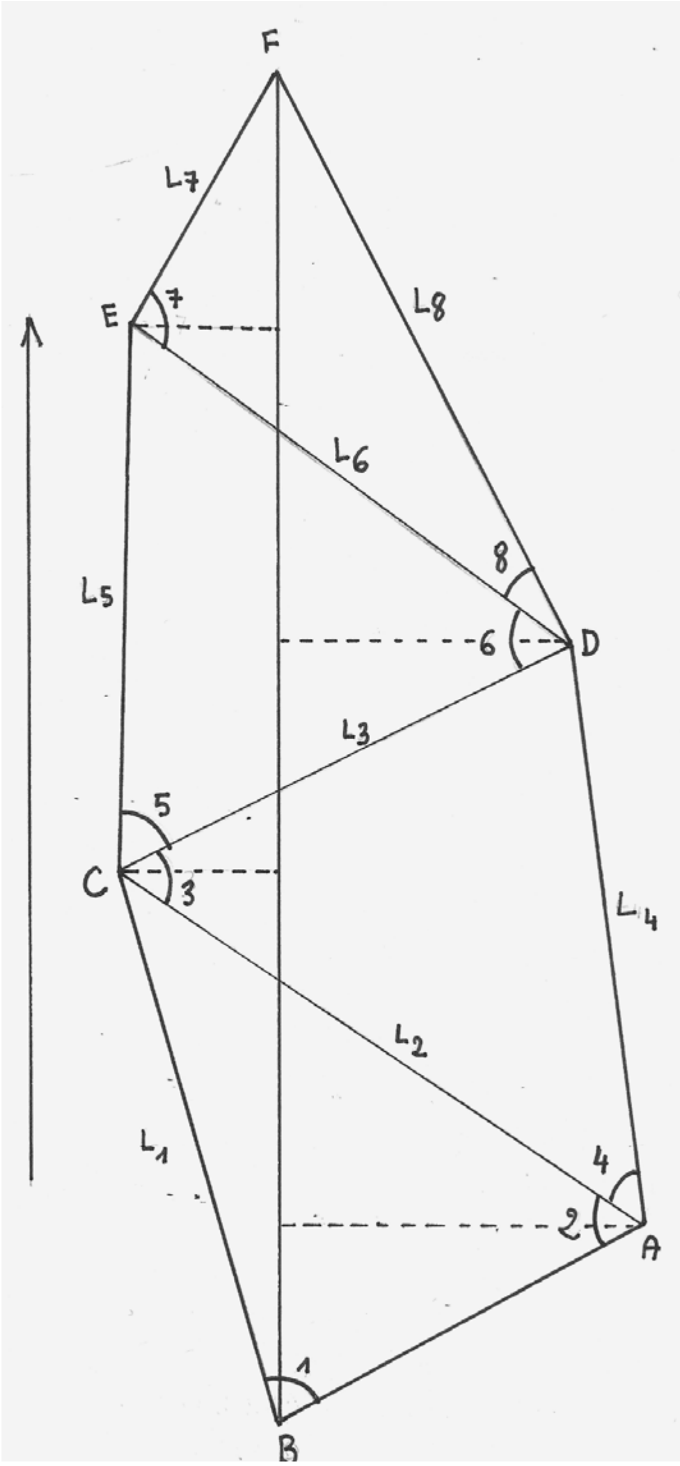


Figure 1 *: Mesure d'une longueur avec un rapporteur !*

Pour mesurer les angles, les astronomes utilisaient un instrument appelé un cercle répétiteur, dû à Borda. Il s'agissait de deux lunettes montées sur un cercle gradué. Les mesures d'angles étaient prises sur le cercle, simultanément, en différentes positions. Les défauts de construction du cercle : excentricité ou irrégularité, étaient ainsi compensés. La précision atteignait la seconde d'arc.

L'enjeu de la mesure de la forme de la Terre

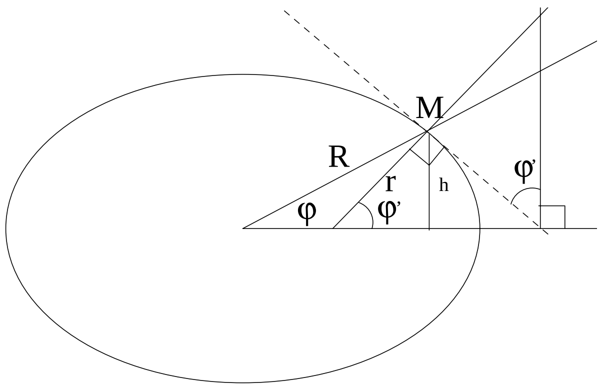
Quel était l'enjeu d'une telle mesure ? Une autre expédition, conduite par Maupertuis, effectua le même travail près du pôle nord, en Laponie, à 70 degrés de latitude nord. Si la Terre était parfaitement sphérique, les deux expéditions devaient trouver la même longueur, aux erreurs de mesures près. Si, du fait de sa rotation, la Terre était aplatie, comme Newton le suggérait, ou oblongue, comme Descartes le pensait, les mesures des deux expéditions devaient différer. De la comparaison des mesures il devait être possible de donner une meilleure description de la forme de la Terre. Voici les résultats des mesures historiques des deux expéditions :

Bouguer et La Condamine à l'équateur
(latitude=0°) : 56768 toises[1]
Maupertuis et Clairaut en Laponie
(latitude=70°) : 57437 toises

Selon vous, quelle forme de la Terre pourrait-on naïvement déduire de ces mesures ?

Nous savons maintenant que Newton avait raison : la Terre est aplatie, son rayon équatorial étant plus grand que son rayon polaire. Comment interprétez-vous alors les mesures des deux expéditions ? L'interprétation détaillée est donnée ci-dessous. Les calculs sont complexes. Les valeurs admises aujourd'hui sont : 6378 km pour le rayon équatorial et 6356 km pour le rayon polaire. L'aplatissement de la Terre est a/b=1,003. La Terre est donc presque sphérique mais la légère différence ne peut pas être négligée pour les calculs précis des parallaxes horizontales, que nous verrons bientôt.

Explication : On peut penser que si la Terre est aplatie à cause de sa rotation, la longueur d'un arc de méridien de un degré serait plus grande à l'équateur qu'au pôle, le rayon équatorial étant plus grand (or les mesures donnent le contraire). Mais ce raisonnement est incorrect, car l'angle de un degré n'est pas mesuré par rapport au centre de la Terre mais par rapport à la verticale du lieu. Démontrons la relation qui existe entre la latitude géocentrique φ et la latitude astronomique φ'. La figure ci-dessous définit les variables utilisées. On a représenté une section méridienne de l'ellipsoïde que forme la Terre. L'aplatissement a été très exagéré pour que la figure soit plus claire. Cette section est une ellipse dont l'équation est : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



En différentiant cette équation on obtient :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{\tan\varphi}\frac{b^2}{a^2}$$

Or cette dérivée n'est autre que la pente de la droite tangente en M à l'ellipse (droite en tirets). On voit sur la figure que cette pente est égale à : $\tan(\frac{\pi}{2}+\varphi')=-\frac{1}{\tan\varphi'}$.

On obtient donc la relation importante suivante:

$$\tan\varphi'=\frac{a^2}{b^2}\tan\varphi$$

Calculons maintenant la longueur L mesurée sur le terrain et qui correspond à un arc $\delta\varphi'=1°$

$L=r\ \delta\varphi'$ ($\delta\varphi'$ exprimé en radian).

Puisque :

$h=r\sin\varphi'=R\sin\varphi$, on obtient :

$$L=R\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\delta\varphi'$$

A partir de la relation liant φ et φ' on déduit que

$$\frac{\sin^2\varphi'}{1-\sin^2\varphi'}=\frac{a^4}{b^4}\tan^2\varphi=A$$

[1] Une toise= 1,94906 mètre

D'où l'on tire :

$$\sin^2 \varphi' = \frac{A}{1+A} = \frac{\sin^2 \varphi}{\frac{b^4}{a^4}\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

Il suffit de reporter dans l'expression de L pour trouver que :

$$L = R\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{a^4}{b^4}\sin^2 \varphi} \quad \delta\varphi'$$

Ne prenez pas peur, cette expression va être employée dans deux cas extrêmes, au pôle (φ=90°) et à l'équateur (φ=0), et elle va se simplifier énormément.

On trouve alors que $\frac{L_{pôle}}{L_{équateur}} = \frac{a}{b}$

Avec les mesures historiques on obtient: $\frac{a}{b} = \frac{57437}{56768} = 1{,}012$.

La Terre est donc bien aplatie (a>b) comme l'avait dit Newton. Notons que la valeur exacte de cet aplatissement est 1,003, car la mesure de Maupertuis n'était pas effectuée rigoureusement au pôle mais en Laponie, à une latitude d'environ 70°.

Note : En adoptant la vraie valeur de l'aplatissement nous trouvons que la valeur du rayon équatorial, d'après les mesures de Bouguer et La Condamine est de :

$$R_{équat.} = \frac{1{,}94906 \times 56768}{\tan(1°)} \times (1{,}003)^2 = 6376894 \text{ m}$$

(pour convertir 1° en radian, on en prend la tangente)
La valeur admise actuellement est de 6378 km.

Ce rayon équatorial va nous servir à définir la parallaxe horizontale, mais nous verrons cela dans un prochain numéro.

■

Récréation

Il est possible de se convaincre que la rotation de la Terre entraîne son aplatissement. Même si cela nous paraît évident aujourd'hui, il n'en a pas été toujours ainsi.

Prenons un ruban de papier et collons le en forme de cylindre. Piquons le sur un crayon, selon un diamètre. Donnons lui la forme oblongue ou circulaire, puis faisons tourner le crayon selon son axe. Le ruban prend une forme aplatie et, par suite des frottements sur le crayon, il garde cette position quand on arrête la rotation. Ainsi, on peut visualiser le phénomène.