

Démonstration de la célèbre relation $E=mc^2$

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Dans ce numéro nous allons voir la démonstration de la célèbre relation prouvant l'équivalence entre la masse et l'énergie, déjà pressentie par plusieurs auteurs, en particulier pour l'origine

électromagnétique de la masse de l'électron (Kaufmann, 1901 ; Abraham, 1903). Voici ce qu'écrivait Poincaré en 1905 :

Je montre, par une application du principe de moindre action, que, dans ces conditions, la compensation est complète, si l'on suppose que l'inertie est un phénomène exclusivement électromagnétique, comme on l'admet généralement depuis l'expérience de Kaufmann, et qu'à part la pression constante dont je viens de parler et qui agit sur l'électron, toutes les forces sont d'origine électromagnétique. On a ainsi l'explication de l'impossibilité de montrer le mouvement absolu et de la contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre.

La première démonstration de l'inertie de l'énergie par Einstein est de 1905. La démonstration est plus complexe que celle que nous allons expliquer ici, publiée en 1946 sous le titre : "Une démonstration élémentaire de l'équivalence entre masse et énergie" (cf. Albert Einstein, Œuvres choisies, tome 2, Editions Seuil/CNRS).

La démonstration ne fait appel qu'à trois lois classiques : 1) la conservation de la quantité de mouvement 2) la pression de radiation (quantité de mouvement d'une onde électromagnétique) 3) l'aberration de la lumière (composition de la vitesse de la source et de la vitesse de la lumière).

Considérons un corps B, au repos par rapport à un référentiel K_0 . Deux groupes d'onde lumineuse l'éclairent brièvement avec une énergie $E/2$ chacune, de part et d'autre (voir schéma), de sorte que son immobilité n'est pas altérée par la quantité de mouvement $E/2c$ fournie par chacune des deux sources.

Examinons B depuis un référentiel K, se déplaçant par rapport à K_0 avec une vitesse v , perpendiculaire à la direction des deux sources S et S'. Les deux rayonnements ont, pour K, une direction qui fait un angle α avec la direction SS'. La loi de l'aberration de la lumière nous dit qu'en première approximation : $\alpha=v/c$. Avant l'absorption

du rayonnement par B, la quantité de mouvement totale du système est :

$$Q_1 = Mv + \frac{E}{c} \sin \alpha \approx Mv + \frac{E}{c^2} v$$

Après absorption du rayonnement par B, la masse est M' , en anticipant "le fait que la masse puisse augmenter lors de l'absorption" (sic). La quantité de mouvement est :

$$Q_2 = M'v$$

La conservation de la quantité de mouvement

$$Q_1 = Q_2 \text{ conduit à la relation : } M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Cette équation exprime la loi d'équivalence entre énergie et masse.

