

Gravitations imaginaires

Pierre Lerich

Résumé : *Avant même la publication des « PRINCIPIA » de Newton, tous les astronomes étaient déjà convaincus de l'existence de la gravitation et de sa décroissance selon le carré de la distance à l'astre attracteur. Le grand mérite de Newton est d'avoir démontré ce qui jusque-là n'était qu'une conviction. Mais cette démonstration l'a amené à étudier bien d'autres cas que le carré de la distance, des cas qui n'existent pas dans l'univers : cela n'empêche pas de les étudier.*

La section II des « PRINCIPIA » commence par la démonstration de la loi des aires, que Kepler avait constatée et vérifiée, mais pas expliquée. Curieusement, la démonstration de Newton ne cite pas une seule fois le nom de Kepler. Cette loi des aires est nécessaire pour établir le principe des sections II et III : la force « centripète », dans une courbe quelconque, est proportionnelle à la déviation du corps attiré par rapport à la tangente à cette courbe (le « sinus verse » de l'arc parcouru, selon les définitions de l'époque) et inversement proportionnelle au carré du temps employé à décrire cet arc. L'expression obtenue va servir à étudier toutes les gravitations possibles, parmi lesquelles on trouvera évidemment celle qui nous concerne tous.

Par exemple, supposons qu'un corps décrive une spirale autour d'un autre plus massif. Par quelle force est-il attiré ? Newton démontre que cette force varie comme l'inverse du cube de la distance. Il ne s'agit pas ici, comme dans le livre II d'une trajectoire freinée par un milieu résistant (cas des satellites artificiels en fin de vie), mais d'une trajectoire libre, résultant seulement du cube de la distance. Newton ajoute aussitôt une seconde démonstration plus rapide (« La même chose autrement », écrit-il).

Autre exemple : supposons un corps décrivant une ellipse, étant attiré par le centre de cette ellipse, et non par l'un de ses foyers, comme dans notre univers réel. Newton démontre que la force attirante serait dans ce cas directement proportionnelle à la distance à ce centre. Là aussi, il propose une seconde démonstration plus rapide.

On peut se poser des questions sur ce monde imaginaire, car à l'infini, la force attirante serait elle aussi infinie, et comme le montre Newton dans un corollaire, toutes les orbites seraient décrites dans le même temps, quelle que soit leur distance, ce qui entraînerait des vitesses inimaginables pour des planètes très éloignées.

La section III est consacrée aux sections coniques « excentriques », dans lesquelles l'astre attirant n'est pas au centre de la figure. C'est évidemment le cas du monde réel, et cette gravitation-là n'est nullement imaginaire. En partant successivement de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole, Newton démontre la loi de l'inverse carré selon une méthode géométrique très élégante. La démonstration moderne procède à l'inverse : elle part des vitesses, des distances et des masses pour aboutir à l'équation différentielle qui détermine l'orbite. Détail étonnant à propos de l'hyperbole : Newton remarque en passant que si la force attractive était remplacée par une force répulsive d'égale intensité, le corps repoussé décrirait une hyperbole semblable, conjuguée de la précédente. Cela revenait à imaginer une sorte de gravitation négative ou d'anti-gravitation. C'est dans cette même section que Newton démontre la 3^{ème} loi de Kepler, et de nouveau le nom de Kepler n'est pas mentionné. Kepler avait proposé cette loi sans aucune explication, l'ayant peut-être trouvée par tâtonnements comme le pensent plusieurs historiens. Peut-être Newton voulait-il marquer son dédain pour ceux qui trouvent, mais ne démontrent pas.

On retrouve des cas de gravitations imaginaires dans la section IX consacrée aux mouvements des apsides. Les périhélie des planètes tournent lentement (une fraction de degré par siècle) mais le périhélie lunaire avance de 3° environ par lunaison, ce qui est considérable. Cette section IX était considérée par Laplace comme l'un des plus beaux chapitres de toute l'histoire des sciences. Pascal affirmait qu'on devrait parler de « beauté géométrique » comme on parle de beauté poétique, picturale, musicale, etc... La beauté géométrique de la section IX est évidente, une fois surmontée la difficulté du texte et de la figure. Celle-ci comporte une ellipse mobile superposée à une ellipse fixe. Si on voit deux ellipses fixes, au lieu d'une fixe et d'une mobile, on ne peut pas suivre le raisonnement. Il faut vraiment voir « bouger » une partie de la figure. Si on y parvient, le raisonnement devient lumineux et le plaisir ressenti est incomparable. De cette démonstration géométrique résulte une méthode générale applicable à toutes les lois imaginables de décroissance de la gravitation. Le premier exemple proposé par Newton est celui d'une gravitation constante, égale à toutes les distances (mais toujours orientée vers un centre fixe). Dans ce cas, l'angle parcouru entre l'apside élevée et l'apside basse serait de $103^\circ 55' 23''$. Certes, ce résultat est obtenu grâce à une approximation : l'ellipse considérée (qui n'en est pas une) doit être peu excentrique, assez voisine du cercle. Ceci n'est pas un « point faible » de la méthode de Newton, car il n'y a pas d'astronomie, même la plus moderne, sans approximations. Les développements en série utilisés aujourd'hui sont d'autant plus précis que l'ellipse se rapproche du cercle.

L'exemple suivant suppose la force attractive directement proportionnelle à la distance. Dans ce cas, l'angle parcouru entre l'apside élevée et l'apside basse serait de 90° . On aurait donc deux apsides élevées distantes de 180° et le foyer de la conique deviendrait alors son centre. On retrouve ainsi par une autre méthode le second exemple proposé dans la section II.

Si la force attractive était inversement proportionnelle à la distance, les apsides hautes et basses seraient distantes de $127^\circ 16' 45''$. Puis Newton envisage un cas étonnant : si la force attractive variait comme la racine quatrième de la puissance 11, c'est-à-dire inversement à la puissance $11/4$ de la distance, l'angle en question serait de 360° . Le corps considéré quitterait l'apside élevée, descendrait pendant un tour complet puis remonterait au tour suivant jusqu'à son altitude initiale. Newton imagine même un corps qui

descendrait pendant 4 révolutions puis remonterait pendant les 4 révolutions suivantes (puissance $-2,984$ de la distance).

On revient à la réalité à la fin de cette section : si à la gravitation « normale » en $1/R^2$, on ajoute (ou retranche) une petite force perturbatrice proportionnelle au cube de la distance, la planète retrouvera son apside élevée après un peu moins (ou un peu plus) de 360° . C'est le cas de la Lune, un peu moins attirée par la Terre à cause de la présence du Soleil. Newton n'a pu obtenir que la première approximation de ce mouvement du périhélie lunaire.

Le problème était très difficile, car un siècle plus tard, les marins se plaignaient encore de l'imperfection des tables de la Lune, qu'ils utilisaient pour faire le point.

Un cas particulier de gravitation imaginaire se trouve dans la section XII. Il s'agit de la gravitation nulle, qui règne à l'intérieur d'une « surface sphérique ». Ici la démonstration géométrique est très simple et très rapide. Imaginons une planète creuse composée d'une croûte rigide épaisse de quelques centaines de kilomètres, et à l'intérieur, le vide ou une atmosphère quelconque. Newton démontre en quelques phrases que dans ce vide, l'apesanteur serait parfaite. On peut imaginer un voyage aux antipodes sans aucune dépense d'énergie (sauf les deux traversées de la couche solide). Ici, on passe directement de la science à la science-fiction. Certes, l'existence d'une planète creuse est peu plausible, mais la démonstration de Newton est quand même totalement convaincante.

Qu'est-ce qui distingue la gravitation réelle de toutes les gravitations imaginaires ? Newton a toujours refusé de se prononcer sur la nature de cette force et sur cet exposant -2 qui lui est attaché. Sur ce point, un siècle après Newton, Laplace a proposé une remarque intéressante. Il a observé que la loi du carré inverse était la seule qui laisserait l'univers inchangé si on multipliait toutes ses dimensions d'une façon quelconque. Par exemple si toutes les dimensions étaient multipliées par 2, la force centrifuge des planètes continuerait de contrebalancer la force attractive du Soleil, par conséquent les planètes décriraient des ellipses semblables et personne ne s'apercevrait de rien. Avec tout autre exposant que -2 , ce serait le chaos. Il est vrai que dans ce cas, l'univers n'existerait pas, et il n'y aurait donc personne pour en prendre conscience. Laplace remarque aussi que -2 est le seul exposant qui permette de rassembler toute la masse d'une planète en un point, son centre de gravité.

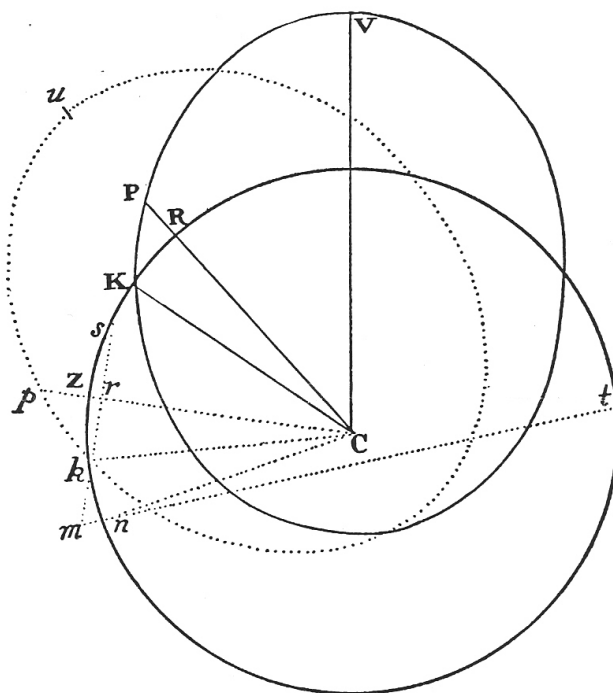
On comprend mieux la gravitation réelle quand on la situe parmi toutes les gravitations imaginables. Cela dit, on n'en sait guère plus sur sa nature profonde. Une force qui s'exerce à distance sans intermédiaire, c'est mystérieux, et Newton en était bien conscient. Si on interprète la gravitation comme une « courbure de l'espace-temps », il n'y a plus de mystère, et l'énigme du périhélie de

Mercury est éclaircie. Ce fut l'un des premiers triomphes de la Relativité. Mais à ce niveau d'abstraction, la science devient difficile à suivre, réservée aux spécialistes. Heureusement, la gravitation selon Newton reste largement suffisante pour les besoins de l'astronomie pratique. ■

PROPOSITION XLIV. THEOREM XIV

The difference of the forces, by which two bodies may be made to move equally, one in a fixed, the other in the same orbit revolving, varies inversely as the cube of their common altitudes.

Let the parts of the fixed orbit VP, PK be similar and equal to the parts of the revolving orbit up, pk ; and let the distance of the points P and K be supposed of the utmost smallness. Let fall a perpendicular kr from the point k to the right line pC , and produce it to m , so that mr may be to kr



as the angle VCp to the angle VCP . Because the altitudes of the bodies PC and pC , KC and kC , are always equal, it is manifest that the increments or decrements of the lines PC and pC are always equal; and therefore if each of the several motions of the bodies in the places P and p be resolved into two (by Cor. II of the Laws of Motion), one of which is directed towards the centre, or according to the lines PC, pC , and the other, transverse