

AVEC NOS ELEVES

Référentiels et mouvement de satellites II -Modélisation mathématique des traces orbitales

Pierre LeFur

Pierre Le Fur, membre du Comité de Liaison Enseignants et Astronomes

Professeur en MPSI à

Institut Supérieur d'Electronique et du Numérique de Toulon

place G. Pompidou 83000 Toulon

pierre.le-fur@isen.fr

Pierre.Le-Fur@wanadoo.fr

Résumé : *Le problème des mouvements des satellites artificiels dans les référentiels géocentriques ou terrestres est abordé de manière progressive en utilisant des outils pédagogiques de complexité croissante : tout d'abord avec un bricolage sphère/carton, puis en utilisant un tableur illustrant une modélisation keplérienne simplifiée, afin d'exploiter pleinement divers logiciels de simulation « clefs en main ».*

Modélisation rigoureuse, dans le référentiel géocentrique (ou céleste)

Données "two lines"

Considérons des satellites dont la trajectoire sera supposée plane dans le référentiel géocentrique (céleste).

Les données numériques définissant l'orbite de satellites figurent dans de nombreux sites Internet. Si l'on désire en savoir plus sur les données numériques nécessaires au tracé d'orbite, un site Internet présente le contenu des fameuses "two lines" définissant le satellite et son mouvement, avec les dernières informations du NORAD. <http://celestrak.com/> (voir un exemple dans l'encadré ci-dessous).

En réalité les « deux lignes » sont trois car la première appelée ligne 0 correspond au nom de l'objet dans le catalogue de satellites du NORAD (réseau américain de surveillance radar). La ligne 1 contient le numéro du satellite, la date de lancement, la date (en fraction de jours) à laquelle sont arrêtées les valeurs indiquées etc.

La ligne 2, que nous allons exploiter, donne

- en deuxième position l'inclinaison i de l'orbite en degrés
- en troisième l'ascension droite (opposé de la longitude céleste, origine point vernal) du nœud ascendant en degrés
- en quatrième l'excentricité (chiffres après la virgule)
- en cinquième l'argument du périégée (position angulaire par rapport au nœud ascendant)
- en sixième, l'anomalie moyenne (angle entre le nœud ascendant et la position du satellite à la date de référence)
- Puis le nombre de révolutions par jour solaire moyen, dans le référentiel géocentrique lié aux étoiles
- enfin le nombre de révolutions effectuées depuis le lancement jusqu'à l'époque de référence (le dernier chiffre est exclu).

La figure 1 traduit en coordonnées célestes, dites équatoriales, les données i et φ_n définissant la trace de l'orbite sur la sphère céleste, dans le référentiel géocentrique.

Les « two lines » donnent les valeurs $i = \text{angle}(CZ, CP)$ et $\varphi_n = \text{angle}(C\gamma, Cn)$ qui orientent l'orbite par rapport aux étoiles.

L'anomalie moyenne est l'angle $\alpha = (Cn, CS)$ à la date de référence, il positionne le satellite sur son orbite (ex.: NOAA14 ; 136,8816°). De même l'argument du périégée place ce point particulier sur l'orbite par rapport au nœud ascendant n (ex.: NOAA14 ; 223,1686°).

A un instant donné le satellite S est repéré par son ascension droite $ASC = -\varphi$ où φ désigne la longitude céleste et sa déclinaison λ (égale à la latitude terrestre survolée). Le plan de l'équateur céleste est confondu avec celui de l'équateur terrestre. Mais le point origine γ des ascensions droites $-\varphi$ est fixe par rapport aux étoiles (à l'échelle de quelques semaines) et tourne par rapport à la Terre en $T_0 = 86164s$.

Relation exacte déclinaison λ /ascension droite $-\varphi$

CP a pour coordonnées X, Y, Z (référentiel céleste géocentrique): $[0, -\sin(i), \cos(i)]$

CS a pour coordonnées: $[\cos(\lambda)\cos(\varphi_n - \varphi), \cos(\lambda)\sin(\varphi_n - \varphi), \sin(\lambda)]$

Or: **CP** est perpendiculaire à **CS** d'où $CP \cdot CS = 0$ soit

$$\sin(\varphi_n - \varphi) = \tan(\lambda) / \tan(i) \quad (R_3)$$

Voilà obtenue la relation déclinaison-ascension droite.

On remarque qu'en utilisant une projection céleste plane de type projection « aphylactique centrale » (ou gnomonique cf. partie 1, §1-b-), on obtient une courbe rigoureusement sinusoïdale d'équation :

$$R \cdot \tan(\lambda) = \tan(i) \sin(\varphi_n - \varphi)$$

$R \cdot \tan(\lambda)$ représentant la position sur l'axe des ordonnées (déclinaison) et φ l'axe des abscisses. Voir figure 2 de la partie 1-b- ; ou courbes de la figure 5 de la partie 1 §2-a-.

D'autre part la déclinaison maximale ou latitude la plus élevée survolée correspond à $\sin = 1$ soit :

$$\lambda_{\max} = i \quad (R_4)$$

Par exemple, la station spatiale « ISS » d'inclinaison $i = 51.6^\circ$ survole nos latitudes et le télescope spatial « HST », tel que $i = 28.5^\circ$ ne survolera jamais la France.

Notons que l'on peut écrire le produit scalaire **CS**. **Z** = $\sin(\lambda)$ d'où la relation:

$$\sin(\lambda) = \sin(\alpha) \sin(i) \quad (R_5)$$

Avec α l'anomalie $\alpha(t) = (Cn, CS) = \omega \cdot t + \alpha$ pour un satellite à orbite circulaire. ω est la valeur donnée par les éphémérides "two lines" à la date de référence, origine des t . si t est exprimé en jours, ω est le nombre de révolutions par jours, au facteur multiplicatif 360° près. Pour une orbite elliptique on approche $\alpha(t)$ par une relation numérique en t .

Relation approchée longitude terrestre Φ , latitude terrestre λ pour un point de l'orbite:

Si la Terre était immobile dans le référentiel géocentrique, la relation (R₃) s'écrirait en longitude terrestre Φ :

$$\sin(\Phi_n - \Phi) = \tan(\lambda) / \tan(i) \quad (R_6)$$

Mais la rotation de la Terre se traduit *approximativement* par une « réduction » de la période apparente de 360° pour φ° à A° pour Φ° . (voir figure 2).

Avec d donné par (R₂). Modifions (R₆) :

$$\sin[(\Phi_n - \Phi)360/A] \approx \tan(\lambda) / \tan(i) \quad (R_7)$$

Cette relation constituera un modèle de trace de trajectoire d'autant plus correct que l'excentricité de l'orbite sera faible et que la vitesse angulaire, par rapport aux étoiles, du satellite sera grande devant celle de la Terre (satellite d'orbite basse). Les figures 6 de la partie 1 §2-b- montrent bien les limites du modèle « sinusoïdal ».

Les résultats obtenus avec ce modèle simplifié permettent néanmoins d'obtenir une image satisfaisante de la réalité pour bon nombre de satellites (ISS, SPOT, HST, Soyouz, Navette etc...).

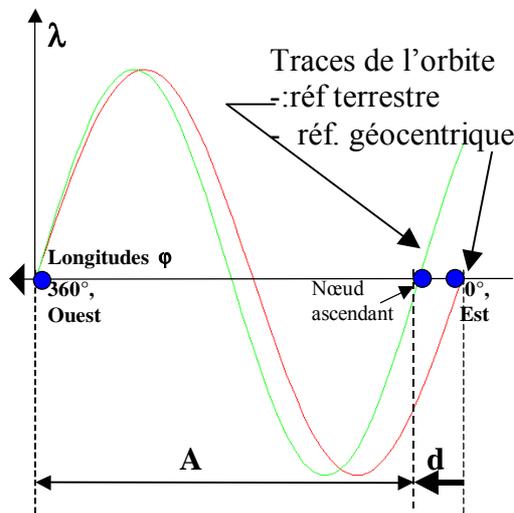


Fig. 2 : Réduction de la période angulaire A de l'orbite par passage du référentiel géocentrique, 360° , au terrestre, A° .

Précession du plan de l'orbite L'action du "bourrelet" équatorial

Jusqu'à présent nous avons supposé le plan orbital fixe par rapport aux étoiles. Le théorème du moment cinétique permet de démontrer cette propriété dans le cas où les forces exercées sur le satellite sont centrales (orientées vers C). Mais voilà, en réalité l'image d'un champ gravitationnel terrestre à symétrie sphérique, donc central, est incorrecte puisque la Terre présente un « bourrelet équatorial » symbolisant sa forme « ellipsoïdale ».

L'expérience de la toupie permet de matérialiser l'effet de ce bourrelet, modélisable par le théorème du moment cinétique [11]:

$$d\sigma/dt = \mathbf{M}(\text{forces})$$

Assimilons le plan de l'orbite et l'axe polaire orbital CP à une toupie. Le moment cinétique σ est porté par cet axe. Comparons le moment des forces de gravitation dues au bourrelet ($\mathbf{F}_{(b/S)}$) et le moment du poids (voir figure 3). Une évidence apparaît, l'axe CP≡OP orbital doit décrire un cône de précession comme celui de la toupie

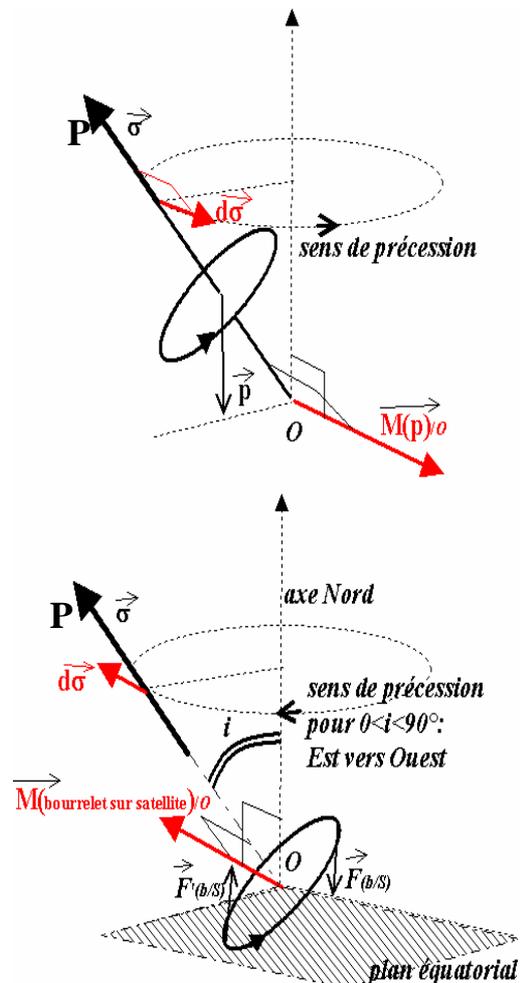


Fig. 3 : Schéma supérieur : pour la toupie d'axe passant par O, la variation du moment cinétique $d\sigma$ est dans la direction du moment du poids, horizontale, la projection verticale du moment cinétique est constante, l'axe de la toupie effectue un mouvement de précession.
Partie inférieure : de même pour l'orbite du satellite, son axe polaire portant σ tourne autour de l'axe des pôles de la Terre, le moment des forces exercées par le bourrelet étant dans le plan équatorial.

Donc le nœud ascendant n dérive en longitude de d' à chaque orbite parcourue. Pour une inclinaison habituelle $0 < i < 90^\circ$, le nœud n « précesse » à longitude terrestre Φ_n croissante, de l'est vers l'ouest. Cela réduit d'autant la période angulaire A du satellite dans le référentiel terrestre. La nouvelle période longitudinale A' devient :

$$A' = A - d'. \quad (R_8)$$

On démontre que

$$d'(^{\circ}) \approx 0,58462 (R_t/a)^2 \sin^2(i) \cos(i) \quad (R_9) \quad [1]$$

où R_t est le rayon terrestre moyen ($6,378.10^6$ m) et a le demi-grand axe de l'orbite, calculé à partir de la troisième loi de Kepler avec $G = 6,672.10^{-11}$ u.s.i et $M_{\text{terre}} = 5,974 .0^{24}$ kg (en effet la valeur de a n'apparaît pas explicitement dans les données « two lines »). Notons que (R_9) est le résultat d'un choix parmi les formules approchées possibles [11], [2].

On remarque que pour $i = 0$ -orbite équatoriale- ou $i = 90^{\circ}$ -orbite polaire- il n'y a pas de précession, ce qui est en accord avec un moment de forces nul dans ces conditions (voir figure 3).

Relation latitude, longitude, période, inclinaison

En utilisant les relations (R_9) , (R_8) , (R_1) , dans (R_7) , on obtient alors la relation complète latitude λ , longitude Φ (en $^{\circ}$, dans le repère terrestre):

$$\sin[(\Phi_n - \Phi) 360/A'] \approx \tan(\lambda)/\tan(i) \quad (R_{10})$$

Voilà obtenue la relation latitude-longitude terrestre, l'inclinaison et la période intervenant dans la période longitudinale terrestre A' . Elle permet de tracer une pseudo sinusoïde $\lambda(\Phi)$ à l'aide d'un tableur ou d'une calculette afin de représenter la trace du passage du satellite choisi ; Pour cela on fait varier Φ de -180 à 180° , on en déduit λ . La valeur de Φ_n , inconnue à ce stade, conduit à traduire cette sinusoïde le long de l'équateur terrestre.

Détermination de la longitude du nœud ascendant Φ_n

(R_{10}) ne peut être exploitable que si l'on dispose de la valeur de Φ_n [2].

Pour la première orbite suivant le tir du satellite, Φ_n est déterminé par la position géographique de la base spatiale B ou pas de tir $[\Phi_B, \lambda_B]$. En effet la première orbite doit survoler ce point (voir coordonnées des bases en annexe 1. Φ_n répond donc à l'équation :

$$\sin[(\Phi_n - \Phi_B) 360/A'] \approx \tan(\lambda_B)/\tan(i) \quad (R_{11})$$

A chaque orbite suivante, le nœud ascendant se translate en longitude de $d+d'$. Pour l'orbite numéro $n^{\circ}\text{Orb}$ (par exemple celui indiqué dans les « two lines » §I-1-a), la longitude $\Phi_{n^{\circ}\text{Orb}}$ du nœud correspondant vaut :

$$\Phi_{n^{\circ}\text{Orb}} = \Phi_n + (n^{\circ}\text{Orb}-1)(d+d'), \text{ modulo } 360^{\circ} \quad (R_{12})$$

On se propose maintenant d'exploiter ces relations, afin d'illustrer quelques mouvements satellitaires classiques.

Bibliographie :

- [1] : « Satellite héliosynchrone », Pierre Bonnet, B.U.P n°707-octobre 1988 p 1073.
- [2] « La calculette de l'astronome », Pierre Kohler, Daniel Ferro, Science et Vie 1982, p 124.
- [3] « Lanceurs et orbitographie, Solstice », Jean Cassanet, B. U. P. n°846, p1293, juillet-août-septembre 2002.
- [4] « Astronomie par Internet », Guy Bouyrie, B.U.P. n°840-janvier 2002 p 90.
- [5] « Et pourtant ils tournent... », Pierre Le Fur, B.U.P. n°860-janvier 2004 p 79.
- [6] « Le TP NASA », Pierre Le Fur, B.U.P. n°860-octobre 2003 n°857 p 1341.
- [7] http://spot4.cnes.fr/spot4_fr/orbite.htm
- [8] <http://www.eleves.ens.fr:8080/home/ollivier/carto3.html> (choisir projection quadratique).
- [9] « En suivant la lune... », Irène Tirapolsky, B.U.P.n°701-février 1988 p 222.
- [10] « ...l'équation du temps », Thierry Alhalel, B.U.P.n°838-novembre 2001 p 1559
- [11] « Mécanique spatiale : perturbations provoquées ou naturelles des systèmes Képlériens », Colonel Robert Genty, B.U.P.n°852-mars 2003 p 387.
- [12] « Eurosat®, un logiciel de simulation du mouvement apparent des satellites artificiels », Pierre Le Fur, B.U.P. n° 801, p 378-379, février 1998.
- [13] <http://www.heavens-above.com/whattime.asp?> ou <http://www.users.skynet.be/zmn/cab/tech/temps/TempsSideral2.htm> ou <http://www.bdl.fr>
- [14] « Initiation à l'astronomie », Agnès Acker p 34, Masson 1982
- [15] Annuaire du bureau des longitudes (éphémérides 1990), p40, chez Masson, 1989