

Cours élémentaire d'astronomie et d'astrophysique : IV - Les mouvements elliptiques

Georges Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé: Dans ce cours, nous montrons comment Kepler a trouvé que les orbites des planètes n'étaient pas des cercles parfaits. Il fallait pour ce faire qu'il ait une grande confiance dans la qualité des mesures de son maître, Tycho Brahé. Pour utiliser les mesures originales, nous sommes amenés à définir les systèmes de coordonnées. Nous verrons ainsi que la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil n'est pas constante et que la définition du temps en est affectée.

Mots-clefs : COURS - LOI - MECANIQUE

Introduction

Qu'avons-nous appris lors des trois premiers cours ? Nous avons compris comment, le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même et son mouvement de révolution autour du Soleil pouvaient expliquer l'alternance du jour et de la nuit avec un rapport entre le jour et la nuit dépendant de la saison. Nous avons compris que la saison chaude était due essentiellement à la durée d'ensoleillement et à la hauteur du Soleil par rapport à l'horizon. Nous sommes même allés plus loin ; grâce à Kepler, Galilée et Newton nous avons été capables de comprendre l'origine de la relation qui lie la distance d'une planète à sa période de révolution. Il est donc possible de prévoir, en principe, la position des différentes planètes dans le ciel. Qu'avons-nous encore à apprendre pour expliquer les mouvements des astres ?

Le progrès, par l'exigence croissante qu'il engendre, nous pousse à approfondir encore nos connaissances. Plus la science progresse, plus le nombre de questions nouvelles augmente, car chaque nouvelle découverte ouvre la porte à de nouvelles interrogations. Nous pourrions nous contenter de ce que nous savons déjà. Cependant les observations méticuleuses de Tycho Brahé révélèrent à Kepler que la trajectoire d'une planète

ne pouvait pas se représenter par un cercle. Ce fut une grande surprise pour l'époque car le cercle était considéré comme une figure géométrique parfaite. Il fallait beaucoup d'audace pour abandonner cette vision. Mais les mesures l'imposaient. Nous allons essayer de nous en convaincre.

Mais avant nous devons apprendre à mesurer la position des astres. Et pour cela nous devons parler de systèmes de coordonnées ; ensuite seulement nous pourrions revenir aux mesures de Tycho Brahé.

Système de coordonnées

La position d'un astre sur le ciel est définie de manière conventionnelle par ce qu'on appelle un système de coordonnées. Aujourd'hui la chose nous paraît naturelle. Cela n'a pourtant pas toujours été le cas.



Figure 1 : la galaxie Messier31 repérée par la constellation d'Andromède et des Poissons (Ismaël Bouillaud, 1667 - reproduction libre inspirée de "Introduction à la cosmologie- Jean Heidmann, PUF, 1973)

Les astronomes utilisaient les constellations, figures construites en réunissant les étoiles, par la pensée, pour constituer une forme imaginaire. Une histoire mythologique greffée sur ces formes donne une pauvre justification mais un bon moyen mnémotechnique. Nous aurons l'occasion d'y revenir quand nous parlerons d'observation. La grande galaxie d'Andromède, Messier 31, était ainsi définie comme l'objet flou situé sous le bras d'Andromède, d'où son nom (Figure 1).

Mais pour désigner un astre sans ambiguïté il fallait une définition plus précise. Les planètes, objets errants comme l'étymologie nous le dit, ne sont jamais à la même place ; il fallait bien avoir recours à un moyen rationnel de repérage.

Les astres semblent piqués, tous à la même distance, sur la sphère céleste. Leur direction nous suffira pour définir leur position. Il s'agit donc de repérer un point sur une surface. De même que sur une feuille de papier (Figure 2) il faut deux grandeurs (les deux coordonnées) pour trouver un point quelconque de la feuille, il nous faut deux coordonnées pour trouver un point quelconque de la sphère céleste. Sur une feuille de papier on peut mesurer la position d'un point, par sa distance au bord gauche et sa distance au bas de la feuille.

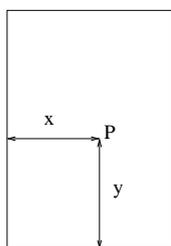


Figure 2 : Repérage sur une surface : deux coordonnées, par exemple x et y , suffisent.

Comment faire sur la sphère céleste ? C'est un peu plus compliqué (Figure 3). Il faut d'abord se donner un plan de référence qui définit un grand cercle sur la sphère dont l'observateur occupe le centre. Nous pourrions mesurer l'angle entre le plan de référence et la direction de l'astre. On peut par exemple mesurer l'angle de 0 à $+90^\circ$ pour les points au-dessus du plan et de 0 à -90° pour les points au-dessous. Mais que signifie "au-dessus" ou "au-dessous". Nous devons le définir en adoptant une convention. Nous définirons, selon la nature du plan, un nord, ou un zénith, enfin toute appellation qui définira un "au-dessus". Dans ce qui suit, nous lui donnerons, le terme générique de direction du **pôle nord**. De même, l'angle entre le plan de référence et la direction de l'astre sera désigné par

latitude. Malheureusement, cela ne suffit pas encore. En effet, à une latitude donnée nous n'avons pas un seul point mais une infinité de points formant un "petit" cercle, de même que sur une feuille de papier, à une distance donnée du bas de la feuille il y a une infinité de points.

Une façon de lever cette dernière ambiguïté est de définir précisément le point sur le petit cercle en comptant depuis une origine choisie arbitrairement. Mais le petit cercle n'est pas le même pour tous les astres. Cette difficulté est facilement levée si nous définissons un demi-plan origine, perpendiculaire au premier, passant par l'observateur et contenant l'astre à mesurer. Il nous suffit donc de mesurer la direction de ce demi-plan (de 0 à 360°) par rapport à l'un de ces demi-plans, arbitrairement choisi comme origine. Dans la suite, nous désignerons cet angle par le terme générique de **longitude**. Il est facile de voir que la définition du demi-plan origine peut se faire simplement en choisissant une direction origine dans le plan de référence, à partir de la position de l'observateur. Est-ce tout ce dont nous avons besoin pour définir un système de coordonnées ? Non. Nous devons encore définir le sens dans lequel nous compterons cette longitude. Ce dernier choix aurait pu être évité si nous avions adopté une convention disant par exemple que le sens de la longitude était défini à partir de la direction "dessus" du plan de référence (règle par exemple du bonhomme d'Ampère). Mais cette convention n'a pas été adoptée car les systèmes de coordonnées ont été définis empiriquement sur des habitudes anciennes.

En résumé, définir un système de coordonnées revient à définir trois choses pour l'observateur : une direction du pôle nord (cette position définira le plan de référence), une direction origine dans ce plan et un sens des angles par rapport à cette origine.

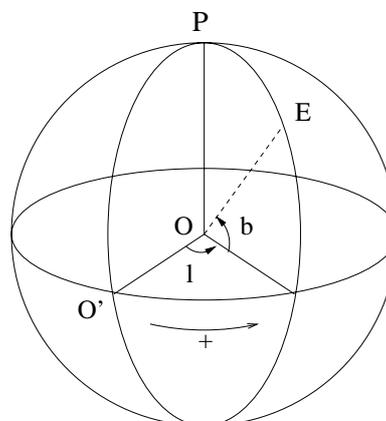


Figure 3 : Les éléments définissant un système de coordonnées sur la sphère céleste

Vous pensez sans doute que ce que nous venons de définir est la seule méthode possible. Sans doute c'est la méthode la plus logique. Pourtant certains astronomes ont utilisé une autre façon de repérer les astres sur le ciel. L'explication dépasserait ce cours élémentaire mais nous pouvons expliquer en quoi le système que nous venons de voir n'est pas totalement satisfaisant pour les très grands catalogues. A un pôle, la coordonnée "longitude" n'a pas de signification. Si vous avez trié votre catalogue selon cette longitude et que vous recherchez un astre situé à un pôle, vous devez balayer tout le catalogue pour trouver l'objet, car toutes les longitudes peuvent s'y trouver. Si le tri avait été fait selon l'autre coordonnée (latitude), la situation serait moins dramatique mais néanmoins la recherche d'un astre, à l'équateur cette fois-ci, serait difficile, car le nombre d'objets y serait très grand pour un même intervalle de latitude. Evidemment ce genre de difficulté n'apparaît que pour des catalogues de plusieurs millions d'astres.

Les différents systèmes de coordonnées

Il existe différents systèmes de coordonnées adaptés aux différentes études envisagées. Par exemple on peut définir les **coordonnées horizontales** à partir du plan de l'horizon de l'observateur et de la direction du sud, comme origine des longitudes. Pourrait-on construire un catalogue dont les étoiles seraient repérées dans un tel système de coordonnées ? Evidemment non, car, les coordonnées ne seraient valables que pour ce lieu et pour l'instant d'observation.

Comment faire pour qu'un astre ait des coordonnées invariables, propres à être enregistrées dans un catalogue ? Tout d'abord, le plan de référence doit être lié à la Terre et être le même pour tous les observateurs : le plan de l'équateur terrestre remplit bien cette fonction. Il est unique et connu : c'est un plan perpendiculaire à la direction du pôle nord, à peu près matérialisé par la direction de l'étoile polaire. Maintenant, comment choisir l'origine des longitudes pour que les rendre indépendantes du temps ? Cette direction doit, par définition, être dans le plan de l'équateur. Y a-t-il une direction remarquable ? Eh bien oui ! L'intersection du plan équatorial et du plan de l'écliptique définit une droite qui est fixe par rapport aux étoiles puisque les deux plans sont fixes (cf. CC106, p6).

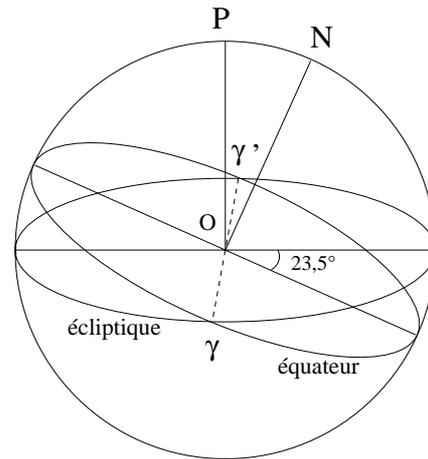


Figure 4 : Intersection écliptique, équateur

A partir de la position de l'observateur, cette droite définit deux directions (voir Figure 4) : l'une $O\gamma'$ dans est la direction occupée par le Soleil lors de l'équinoxe d'automne, l'autre, $O\gamma$, est la direction occupée par le Soleil à l'équinoxe de printemps. Nous avons déjà rencontré ces directions dans le deuxième cours. Laquelle de ces deux directions choisir comme origine des longitudes ? Par convention c'est la direction $O\gamma$ qui a été choisie. Comme $O\gamma$ est à la fois dans le plan de l'équateur et dans le plan de l'écliptique, cette direction nous servira d'origine pour les **coordonnées équatoriales** et également pour les **coordonnées écliptiques**. Dans le cas des coordonnées équatoriales les "longitudes" s'appellent les ascensions droites et les "latitudes" les déclinaisons. Pour les coordonnées écliptiques on parle tout simplement de longitudes et latitudes écliptiques. Dans ces deux systèmes, le "dessus" du plan de référence est donné par le pôle nord terrestre. Les longitudes écliptiques et les ascensions droites sont toutes deux comptées dans le sens direct, le sens contraire des aiguilles d'une montre. Nous aurons l'occasion de revenir sur les coordonnées équatoriales dont l'utilisation est fondamentale pour le pointage des instruments d'observation.



Le point γ dans la constellation des poissons

Le point γ , origine des longitudes, est situé dans la constellation des Poissons, mais cette information ne suffit pas pour trouver sa position précisément, car il n'y a pas d'étoile dans cette direction. Dommage ! Ce point tourne en même temps que les étoiles, du fait de la rotation de la Terre. Vous allez sans doute dire que ce point décrit donc un tour en vingt-quatre heures de nos montres ? Je suis désolé de vous décevoir mais ce n'est pas tout à fait exact. Et nous allons préciser cette nouvelle notion, très importante.

Temps solaire et temps sidéral

Nous définissons le temps à partir de la rotation de la Terre¹. Comment fait-on ? Visons le Soleil, dans une direction donnée, en prenant un repère terrestre (par exemple avec les coordonnées horizontales). Du fait de la rotation de la Terre, le Soleil ne restera pas dans cette direction. Après une journée nous le retrouverons dans la même direction. Nous décrèterons qu'il s'est écoulé 24 heures "solaires" (basées sur le Soleil).

Si au lieu de choisir le Soleil, nous avons fait la même chose avec une étoile autre que le Soleil, nous aurions défini 24 heures "sidérales" (basées sur une étoile). Ces 24 heures sidérales sont-elles égales aux 24 heures solaires ? La réponse est non, car pendant la mesure, la Terre a tourné autour du Soleil (Figure 5) ; la direction initiale, repérée dans mes coordonnées horizontales aura changé, dans un repère attaché au Soleil (coordonnées écliptiques). La chose est facile à comprendre en examinant la figure ci-dessous.

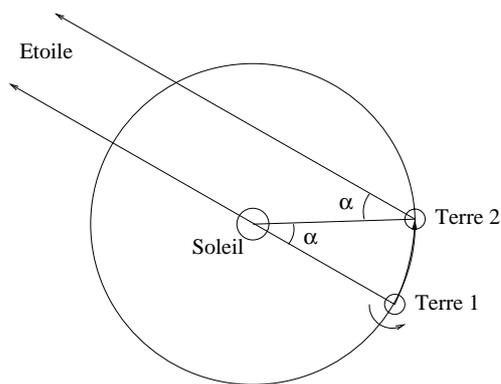


Figure 5 : Relation entre temps sidéral et temps universel. Pour juger que la Terre a effectué un tour sur elle-même, il faut prendre une direction de référence (Soleil ou étoile). La durée dépend de ce choix à cause de sa révolution autour du Soleil.

¹ Ce n'est plus le cas aujourd'hui car nos horloges atomiques sont plus régulières que ne l'est la rotation de la Terre.

En une révolution complète (c'est-à-dire 365 jours) le temps solaire aura perdu un tour (24 heures) sur le temps sidéral. Le temps sidéral avance plus vite de $24/365 = 0.0658$ heure par jour, soit 3min56s. Le point γ qui, redisons le, est notre origine des longitudes écliptiques ou équatoriales, fait un tour en 24 heures de temps sidéral. La position du point γ donne le temps sidéral. Inversement, une horloge donnant le temps sidéral nous permet à tout moment de connaître la position du point γ dans le ciel. Si vous visitez un observatoire traditionnel, vous y verrez deux horloges, aucune ne donne l'heure de votre montre : la première horloge donne le temps universel (temps solaire moyen à Greenwich) ; la deuxième donne le temps sidéral. Notez bien le mot "moyen". Il cache une petite complication que nous ne tarderons pas à comprendre.

Nous avons tous les éléments nécessaires à la poursuite de notre étude des mouvements. Revenons donc à notre histoire, à Tycho Brahé et à Kepler.

Les mesures de Tycho-Brahé

Tycho-Brahé avait accumulé les observations de la planète Mars. Il avait ainsi les positions très précises à la minute d'angle près sur un laps de temps d'au moins dix ans. C'était un travail remarquable. Réussir à mesurer un angle d'un soixantième de degré n'est pas chose facile. Pour vous en convaincre, regardez votre rapporteur. Les plus petites divisions sont de un degré (parfois un demi degré). C'est déjà très petit.

Tycho-Brahé n'exploita pas ses données. Il les garda même jalousement sans les faire partager à son jeune et génial collègue Kepler. Peut-être avait-il compris quelle révolution se cachait dans ses données. Quand il mourut, Kepler hérita de ce trésor qu'il sut magnifiquement exploiter. C'est l'extrême confiance en la qualité des mesures de son maître qui permit à Kepler de se convaincre qu'il y avait quelque chose de nouveau. Comment procéda-t-il ?

Tycho-Brahé avait enregistré les longitudes écliptiques de Mars. Le choix de coordonnées écliptiques était très naturel. En effet les planètes sont toutes très proches de ce plan. On peut dessiner sur une même feuille de papier, la trajectoire de la Terre, et la trajectoire de Mars, Le Soleil occupant le centre (puisque nous faisons, avec Kepler, l'hypothèse que le système du monde est héliocentrique).

Parmi toutes les mesures de Tycho-Brahé, Kepler a pu trouver des paires de mesures faites à 687 jours d'intervalle. Pourquoi donc ? Depuis la Terre, on peut observer Mars et voir quand la planète revient à la même position par rapport aux étoiles. Mars est-elle donc revenue au même point de l'espace ? Non, car la Terre, n'étant plus à la même place, le point de vue a changé. Entre ces deux observations il s'est écoulé un temps S , qu'on appelle la période **synodique**. Pour Mars cette période est de 780 jours. Comment trouver la vraie période, celle que nous mesurerions depuis une étoile extérieure et que l'on appelle pour cette raison, la période **sidérale** P . Le calcul n'est pas difficile. Nous avons déjà expliqué (CC105 p26) comment déterminer la période sidérale à partir de la période synodique, dans le cas d'une planète intérieure (planète plus proche du Soleil que ne l'est la Terre). Le calcul est assez semblable. Amusez vous à le refaire et vous trouverez que :

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{365.25} - \frac{1}{S}$$

Avec $S=780$ jours, vous trouverez que Mars revient exactement au même point de sa trajectoire après un temps $P=687$ jours. Ce genre de calcul était familier à Kepler. C'est ce qui explique qu'il ait constitué des paires de mesures avec cet intervalle de temps. Nous reproduisons les mesures utilisées par Kepler².

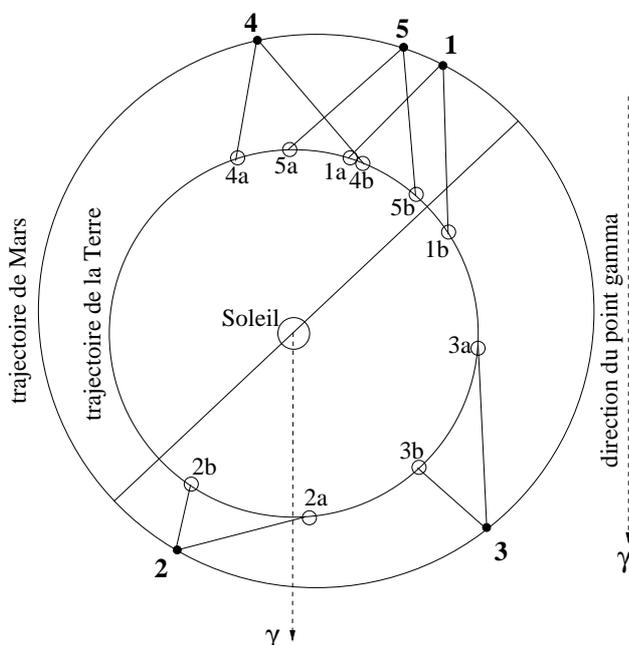


Figure 6 : La construction de Kepler avec des paires de points.

² Mesures rassemblées par l'astronome O. Gingerich

Tableau : Longitudes écliptiques du Soleil et de Mars utilisées par Kepler.

	date	l_{Soleil} (degrés)	l_{Mars} (degrés)
1a	17 Fev. 1585	339.38	135.20
1b	05 Jan. 1587	295.35	182.13
2a	19 Sep. 1591	185.78	284.30
2b	06 Aou. 1593	143.43	346.93
3a	07 Déc. 1593	265.88	3.07
3b	25 Oct. 1595	221.70	49.70
4a	28 Mar. 1587	16.83	168.20
4b	12 Fev. 1589	333.70	218.80
5a	10 Mar. 1585	359.68	131.80
5b	26 Jan. 1587	316.10	184.70

Vous voyez sur la Figure 6 que par ces observations Kepler a pu donner la position de Mars pour chacune des paires de mesures, en supposant la Terre se déplaçant régulièrement sur une orbite circulaire (ce qui est une bonne approximation, mais Kepler avait pu aussi tracer la forme de l'orbite terrestre). Avec la date on peut placer la Terre aux emplacements exacts sur son orbite autour du Soleil. Regardez, par exemple, le point 5a. Il correspond au 10 mars 1585, une dizaine de jours avant l'équinoxe de printemps. Vu depuis 5a le Soleil est presque dans la direction du point γ . La direction du Soleil vue depuis le point 2a (19 septembre) nous donne presque la direction du point γ . En construisant les cinq positions de Mars pour les cinq paires de mesures, Kepler a vu que le Soleil n'était pas au centre de la trajectoire de Mars. L'excentricité (écart entre le centre réel et la position du Soleil, rapporté à la mesure du rayon maximal) est de 0.09, presque dix fois celle de la Terre. C'est ainsi que Kepler a pu faire l'hypothèse que la trajectoire de Mars était bien représentée par une ellipse. Il a constaté aussi que la vitesse de déplacement des planètes n'était pas constante. Quand la planète est loin du Soleil sa vitesse est plus faible. Mais alors, me direz vous, c'est aussi vrai pour la Terre et le temps, mesuré par la position du Soleil, va être affecté d'une variation traduisant les changements réguliers de vitesse de la Terre sur son orbite. Examinons cette question qui a un effet direct sur la mesure précise du temps.

L'équation du temps

Nous venons de comprendre que le mouvement apparent du Soleil n'est pas uniforme tout au long de l'année car la Terre ne se déplace pas sur un cercle à une vitesse bien uniforme. On peut définir un **Soleil moyen** qui lui, aurait un mouvement

uniforme. L'hiver le Soleil vrai prendrait de l'avance sur le Soleil moyen car la Terre étant plus proche du Soleil, sa vitesse est plus grande (deuxième loi de Kepler). Le Soleil passe donc plus vite et la durée vraie des 24 heures solaires est plus courte que les 24 heures que nous aurions mesurées avec une horloge bien régulière. L'été ce serait l'inverse. Le temps apparent devrait fluctuer par rapport au temps vrai selon une belle sinusoïde³, bien symétrique (courbe en tirets sur la figure 8). Je dis "devrait" car en fait un autre phénomène, aussi important, se superpose à celui-ci. Expliquons le.

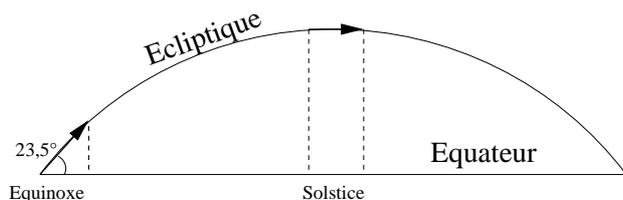


Figure 7 : Effet de projection de la vitesse orbitale du Soleil sur l'équateur.

C'est la rotation de la Terre sur elle-même qui fixe la durée de 24 heures. On gradue les heures sur l'équateur alors que tout au long de l'année le Soleil se déplace sur l'écliptique qui fait un angle de 23,5° avec l'équateur. Aux solstices (juin et décembre) le déplacement du Soleil sur l'écliptique est parallèle à l'équateur (revoir le ballon du deuxième cours). Aux équinoxes (mars et septembre) le mouvement apparent du Soleil est incliné de 23,5° sur l'équateur. Le déplacement apparent, étant la projection sur l'équateur, il sera variable (Figure 7). Cet effet de projection produit un décalage lui aussi bien représenté par une sinusoïde (courbe en pointillés sur la figure 8), avec des maxima en mars et septembre (aux équinoxes) et des minima en juin et décembre (aux solstices). La fréquence de cette deuxième courbe est donc double de la première puisque deux fois par an l'effet de projection est le même.

La variation globale dont nous parlons peut paraître faible. Elle est de l'ordre de 15 minutes en plus ou en moins du temps moyen. Mais 15 minutes de temps correspondent à une erreur d'angle de 3,75 degrés. Vous voyez que ce n'est pas du tout négligeable quand on se pique de faire des mesures à la minute d'arc près.

³ La loi de variation est un peu plus compliquée mais en première approximation il s'agit effectivement d'une loi sinusoïdale.

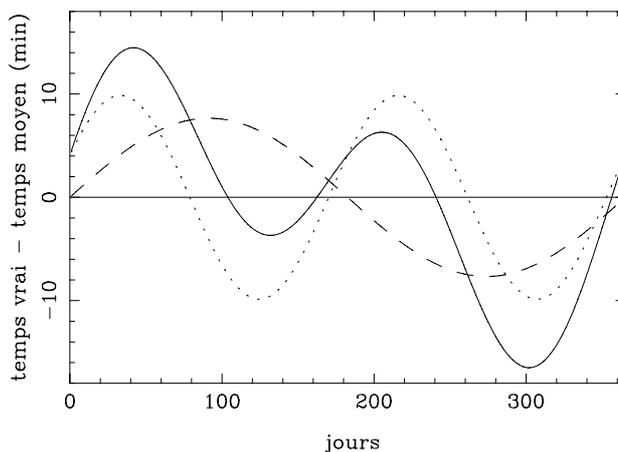


Figure 8 : l'équation du temps résulte de la superposition de deux phénomènes approximativement sinusoïdaux : la variation de la vitesse orbitale de la Terre et l'effet de la projection de cette vitesse sur l'équateur.

Donnons les équations approximatives des deux sinusoïdes qui composent l'équation du temps.

Pour l'effet de la variation de vitesse de la course apparente du Soleil on a l'écart :

$$\Delta t_1 = 7,66 \sin(0.0172 j) ,$$

où j est le numéro du jour de l'année et où l'écart est donné en minute de temps. En réalité il faudrait compter depuis le 3 janvier car c'est le 3 janvier que la Terre passe à son périhélie.

Pour l'effet de projection l'écart est (en minute de temps):

$$\Delta t_2 = -9.86 \sin(0.0344 j - 2.7144)$$

Les variations globales entre le temps vrai et le temps moyen sont données par : $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, c'est ce qu'on appelle l'équation du temps.

Pour conclure avec les orbites elliptiques, nous donnons, dans l'encadré ci-dessous, les éléments qui permettent de définir complètement la trajectoire d'un astre par rapport à un plan de référence. Ceci s'applique à la définition de la trajectoire d'une planète par rapport à l'écliptique.

Quand ces éléments sont connus, il est possible de calculer la position de l'astre, à tout instant du jour et de la nuit. Nous verrons dans les pages qui suivent l'intérêt de la chose à propos du transit de Vénus.

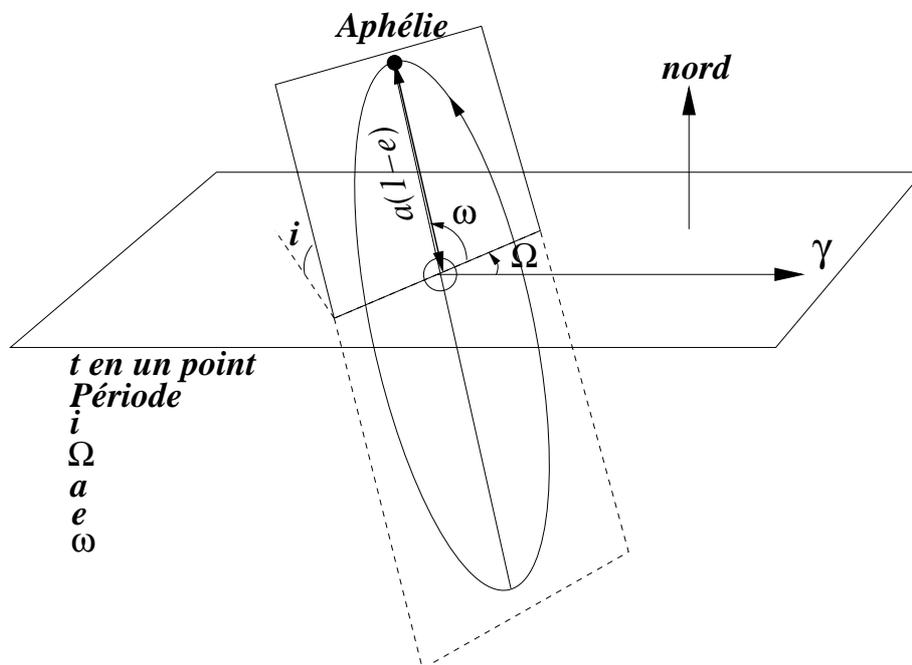
Les éléments d'une orbite elliptique

Quel est le nombre minimum de paramètres nécessaires pour définir parfaitement une trajectoire elliptique ? Avant de considérer le cas général, commençons par celui d'une trajectoire circulaire simple. La réponse est assez intuitive. Il faut définir le plan de la trajectoire, son centre, son rayon, la période de révolution et le temps de passage en un certain point quelconque de la trajectoire. Donc, une orbite circulaire est définie par cinq éléments.

Dans le cas d'une orbite elliptique, le rayon est remplacé par le demi grand axe, le centre est remplacé par un foyer de l'ellipse. Mais il faut définir deux éléments supplémentaires : l'aplatissement de l'ellipse (par exemple le rapport de son demi grand axe à son demi petit axe) et la direction de son périastre. Notons que la direction de son grand axe n'est pas équivalente à la direction du périastre car il resterait l'indétermination du choix d'un des deux foyers de l'ellipse. Au total sept éléments sont donc nécessaires. Différents choix sont possibles. Par exemple au lieu de définir l'aplatissement de l'ellipse b/a on peut définir son excentricité e . On rappelle en effet que $(b/a)^2 = 1 - e^2$.

Pour les orbites d'une planète on choisit conventionnellement les sept éléments suivants :

- a*** Le demi grand axe (par exemple en unité astronomique) ;
- e*** L'excentricité, distance entre le centre et un foyer, divisée par le demi grand axe ;
- i*** L'inclinaison entre le plan de l'écliptique et le plan de la planète considérée ;
- Ω** Longitude écliptique du nœud ascendant (la direction du nœud ascendant est la direction définie sur la droite d'intersection du plan de l'écliptique et du plan de l'orbite de la planète, dans la direction où la planète passe de l'hémisphère écliptique sud à celui du nord) ;
- ω** L'angle entre la direction du nœud ascendant et la direction du périastre. Cet angle est mesuré dans le plan de l'orbite de la planète et est compté positivement dans le sens du mouvement ;
- T*** Temps de passage au périhélie ;
- P*** Période sidérale de révolution.



■ ERRATA

Dans le précédent Cours (CC108) nous avons commis deux erreurs, que nous avons oublié de corriger, en dépit de leur détection par P. Causeret :

Page 7, colonne 1, ligne 1 : En hiver, les jours solaires vrais sont plus longs que les jours solaires moyens. En effet, le Soleil vrai avançant plus vite sur l'écliptique, il faut plus de temps pour que la rotation de la Terre sur elle-même nous fasse retrouver le Soleil au méridien.

Page 8 (encadré) : sur la figure, il faut lire périhélie (ou plus généralement périastre) et non aphélie.

Avec nos excuses pour cet oubli.