



# Stabilité et Mécanique céleste

Christelle Dumas et Michel Bobin

Élève en classe prépa, Christelle Dumas nous présente le travail sur le thème "Systèmes dynamiques" qu'elle a effectué dans le cadre d'un TIPE durant l'année scolaire 96-97. Une version écrite de la totalité de la partie technique serait trop copieuse pour être publiée dans nos colonnes. Toutefois on trouvera dans l'annexe 2 le traitement des points de Lagrange, rédigé par Michel Bobin.

**Le** TIPE (Travail d'Initiative Personnelle Encadré) est une nouvelle épreuve créée à la suite de la réforme des classes préparatoires scientifiques. La plupart des concours aux Grandes Écoles l'ont mise en place pour l'année 1997. En particulier les Mines, Centrale et les ENSI se sont regroupés pour faire passer une épreuve commune.

Au début de l'année de Mathématiques Spéciales, l'élève choisit une matière entre deux ou trois proposées suivant la section. Pour ce qui est de la section MP, le choix se fait entre mathématiques, physique et informatique. A chaque matière est rattaché chaque année un thème, respectivement les systèmes dynamiques, la mesure et l'image pour l'épreuve de 1997.

Le travail de l'élève tout au long de l'année consiste d'une part à choisir un sujet approprié, à l'étudier, à préparer un exposé, et enfin à rédiger une fiche synoptique (cf. Annexe 1) qui doit résumer son travail. D'autre part il doit s'entraîner à lire des textes scientifiques rapidement et acquérir une culture sur le thème proposé. L'épreuve commune se présente ainsi : à partir de textes scientifiques ou de vulgarisation ayant trait au thème général et fournis par le jury, le candidat

prépare pendant 2h15 un exposé. Puis il présente au jury constitué de deux personnes deux exposés de 10 min : celui préparé dans l'année et celui proposé par le jury. Chacun est suivi de 10 min de questions. La fiche synoptique a pour but de rappeler au jury la teneur de l'exposé personnel. L'élève dispose d'un tableau et d'un rétroprojecteur pour ses exposés.

Les documents que l'on m'a proposés le jour de mon oral étaient regroupés sous le titre "information et complexité" et comportaient un texte scientifique et un texte plus culturel extrait de "La Recherche".

J'ai choisi comme sujet personnel "stabilité en mécanique céleste", qui relève du thème mathématique, malgré son titre.

Dans la première partie, je définis la stabilité d'une solution d'un système différentiel, je fournis une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions d'un système linéaire soient stables, puis je donne des théorèmes qui permettent de déduire la stabilité d'une solution d'un système non linéaire de la stabilité de la même solution du système linéaire associé.

La suite de mon exposé consiste à étudier des applications de cette notion de stabilité dans le domaine de la mécanique céleste.

# Annexe 1 : fiche synoptique

Nom de l'établissement : Lycée Pasteur ..... Cadré de l'établissement et Signature

Ville : Mevilly-sur-Seine .....

Je soussigné, .....  
(mon prénom) (nom)

atteste que la description ci-dessous, correspond au travail effectué en

TIPE durant l'année par l'élève Christelle DUMAS .....

Date : ...../...../.....



à remettre en deux exemplaires lors de l'épreuve

N° d'inscription : ..... Nom : DUMAS .....

Prénoms : Christelle Marie .....

Candidat

Filière : MP ..... Thème : Systèmes dynamiques .....

## Stabilité et mécanique céleste

L'étude du système solaire a toujours été un aiguillon puissant dans le développement de la mécanique. Les plus grands noms de la science y sont attachés : Kepler, Newton, Lagrange, Laplace... La question de stabilité touche à la philosophie, à l'histoire, à la physique et aux mathématiques. Je m'intéresse ici à quelques techniques mathématiques sous-jacentes à ce problème.

### Travail de recherche

Les livres que j'ai cités dans la bibliographie proviennent du centre de documentation de l'INRIA de Rocquencourt et des bibliothèques de l'Université Pierre et Marie Curie. D'autre part, je me suis servi du logiciel de calcul formel Maple afin de faire les calculs, les graphes et toutes sortes de représentations nécessaires à mes applications.

### Plan de l'exposé

#### 1- Comportement asymptotique de systèmes linéaires et non linéaires

11- Stabilité des solutions d'une équation différentielle. Dans ce paragraphe, je m'attache à définir différents types de stabilité de solutions d'une équation différentielle.

12- Classification des systèmes linéaires  $2 \times 2$ .

Il s'agit ici d'étudier la stabilité des solutions de l'équation différentielle  $x' = Ax$ , où  $A$  est une matrice carrée inversible d'ordre 2. On obtient ainsi six portraits de phase types.

13- Extension aux systèmes linéaires  $n$ -dimensionnels. Dans certains cas, le comportement asymptotique des solutions du système au voisinage d'un point critique est le même que celui des solutions du système linéarisé ; je précise donc dans cette partie des conditions suffisantes qui permettent d'étendre les résultats acquis dans le cas linéaire.

#### 2- Étude de la libration de la Lune

21- Mise en place des équations.

On étudie le système constitué de deux corps en interaction gravitationnelle, l'exemple pris est celui de la Terre et de la Lune. Pour cela on fait l'hypothèse que l'un des axes liés à la Lune est constamment perpendiculaire à son orbite.

Afin d'exprimer le théorème du moment cinétique, on établit le moment de la force gravitationnelle.

L'équation obtenue s'appelle équation d'Euler.

22- Étude au voisinage d'un point critique.

On reconnaît l'équation du pendule. Dans un cas, on obtient deux valeurs propres réelles opposées, l'approximation de la linéarisation donne alors l'instabilité du système. Dans l'autre, les valeurs propres sont imaginaires pures et on ne peut pas conclure à long terme. On obtient alors une condition nécessaire de stabilité.

#### 3- Étude des points de Lagrange

31- Mise en place des équations.

Le problème restreint des trois corps, dans lequel l'un des corps est de masse négligeable devant celle des deux autres, se modélise dans un repère tournant lié aux corps massifs. On établit le système régissant le mouvement du corps sans masse.

32- Étude au voisinage d'un point critique.

Les points critiques sont de deux types : les points d'Euler, qui sont alignés avec les deux corps massifs et les points de Lagrange qui forment chacun un triangle équilatéral avec ces deux corps. La linéarisation du système au voisinage de ces points permet une étude partielle de leur stabilité.

### Références :

(1) ARGYRIS, J., FAUST, G., HAASE, M. *An exploration of chaos : an introduction for natural scientists and engineers*, No.7 in Texts on computational mechanics. North-Holland, 1994.

(2) CODDINGTON, E. A., AND LEVINSOHN, M. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

(3) GUTHMANN, A. *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*. Bibliographisches Institut, 1994.

(4) HESTENES, D. *New foundations for classical mechanics*. Reidel, 1987.

(5) KRASNOV, M., KISSELEV, A., AND MAKARENKO, G. *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*, Edition Mir, 1981.

Outre l'étude de la libration de la Lune qui permet d'expliquer pourquoi l'on ne voit qu'une face de celle-ci, j'ai abordé le problème restreint des trois corps. Ce problème consiste à considérer deux corps massifs  $M_1$  et  $M_2$  en interaction et qui font subir à un troisième corps de masse quasi-nulle un champ d'attraction gravitationnelle. En supposant que les deux corps massifs sont en trajectoire circulaire et uniforme, le système différentiel régissant le mouvement du troisième corps s'établit aisément. A ce problème, Euler a trouvé trois positions d'équilibre (les points sont les extrema de la fonction potentiel appliquée au corps) : ces points sont alignés avec  $M_1$  et  $M_2$ . Lagrange, plus tard, en a trouvé deux autres qui forment chacun un triangle équilatéral avec  $M_1$  et  $M_2$ .

On se demande si ces points d'équilibre sont stables, c'est-à-dire si la solution constante, égale à ce point critique est stable.

La linéarisation permet de conclure dans le cas des points d'Euler : ils sont instables. Elle ne permet pas de traiter complètement le cas des points de Lagrange :

Annexe 2 :

## Etude des points de Lagrange dans le problème restreint des trois corps.

Plus d'un labo de physique s'orne d'un dessin humoristique dont la légende est " Si l'expérience ne marche pas, avant d'incriminer l'électrodynamique quantique, penser à vérifier les fusibles". Ce principe de simplicité, dit "rasoir d'Occam", n'est cependant pas toujours facile à respecter : comme le savent les lecteurs de ces Cahiers, Alexis-Claude Clairaut, fit, en 1743, une lecture devant l'Académie : "l'orbite de la Lune dans le système de M. Newton" ; puis suggéra une loi d'attraction en  $kR^{-2} + k'R^{-4}$  avant de se ressaisir en 1749. D'Alembert aussi avait pensé à  $kR^{-2} + k'R^{-1}$ . On sait depuis Poincaré que même avec la bonne vieille loi de Newton en  $kR^{-2}$  le problème des trois corps n'admet pas de solution générale.

### 1 - Mise en place des équations.

Les trois corps  $M_1, M_2, M_3$  sont supposés de masses respectives  $m_1, m_2, 0$  (fig.1). C'est le "problème restreint des trois corps". Leurs distances mutuelles sont  $R = M_1M_2, r_1 = M_1M_3, r_2 = M_2M_3$ . Le potentiel attractif exercé en  $M_3$  par  $M_1$  et  $M_2$  a donc pour expression :

$$U(r_1, r_2) = G \times \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) \quad (1)$$

on peut simplement démontrer que si le rapport des masses de  $M_1$  et  $M_2$  est compris entre 0,04 et 25, il ne peut y avoir stabilité (Cf. Annexe 2).

Cependant, l'expérience vient à notre secours : en 1966, on a observé un astéroïde, Achille formant un triangle équilatéral avec le Soleil et Jupiter ; on en a découvert d'autres qui forment deux groupes que l'on a nommés les Troyens (avec Hector) et les Grecs (avec Patrocle). Il peut donc y avoir stabilité des points de Lagrange... En 1990, on a découvert Eurêka, astéroïde formant un triangle équilatéral avec Mars et le Soleil.

Enfin, dans les années 60, des scientifiques ont trouvé une démonstration du fait que si le rapport des masses de  $M_1$  et  $M_2$  est supérieur à 25, les points de Lagrange sont stables, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de ce rapport.

La partie technique de mon exposé ne prétend pas donner réponse à tout, puisque la linéarisation ne permet pas toujours de conclure. Cependant, elle permet de montrer une application d'une théorie un peu ardue et abstraite.

Si l'on fait en outre, comme ci-après, l'hypothèse que le mouvement de révolution de  $M_1$  et  $M_2$  autour de leur barycentre  $O$  est circulaire uniforme, on parle du "problème restreint et circulaire des trois corps".

On sait que l'interaction gravitationnelle :

$$\vec{F}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

amène, dans le cas elliptique, (période  $T$ , demi-grand axe  $a$ ) à la troisième loi de Kepler :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{Gm_1 m_2}} \times a^{\frac{3}{2}}$$

où  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  est la "masse réduite" du système.

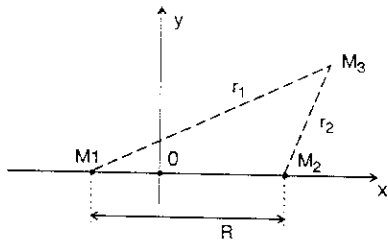
Dans le cas circulaire uniforme (avec  $a = R$ ), la vitesse angulaire  $\omega = 2\pi / T$  est donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (2)$$

On se place alors dans le repère tournant, non galiléen, d'origine  $O = \text{Bar} \{(M_1, m_1); (M_2, m_2)\}$  lié aux deux corps massifs où l'on a  $M_1 : (-\mu R / m_1; 0; 0)$

$M_2 : (\mu R / m_2; 0; 0)$   $M_3 : (x; y; 0)$  (fig.1).

fig.1



On se restreint donc encore au cas où les conditions initiales font que le mouvement de  $M_3$  a lieu dans le plan de ceux de  $M_1$  et  $M_2$ . On a alors :

$$r_1^2 = (x + \mu R / m_1)^2 + y^2$$

$$\text{et } r_2^2 = (x - \mu R / m_2)^2 + y^2 \quad (3)$$

Dans ce référentiel tournant avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega} : (0 ; 0 ; \omega)$ , pour une particule de masse  $m$  repérée par  $\vec{r} : (x ; y ; 0)$ , le théorème de Coriolis sur la composition des accélérations s'exprime par :

$$\vec{r}_{gal}'' = \vec{r}'' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (4)$$

où  $\vec{r}_{gal}''$  est l'accélération dans le repère galiléen

et  $\vec{r}''$  celle dans le repère tournant ;

$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' : (-2\omega y ; 2\omega x ; 0)$  est l'accélération de Coriolis ;

$\vec{\Gamma}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) : (-\omega^2 x ; -\omega^2 y ; 0)$  est l'accélération d'entraînement.

La relation fondamentale de la dynamique,

$$m(\vec{r}'' + \vec{\Gamma}_c + \vec{\Gamma}_e) = m \cdot \vec{\nabla} U_{(r)}, \text{ fournit par projection}$$

$$\text{le système : } \begin{cases} x'' - 2\omega y' - \omega^2 x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ y'' + 2\omega x' - \omega^2 y = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \quad (5)$$

que l'introduction du "potentiel efficace"

$$V(r_1 ; r_2) = U(r_1 ; r_2) + \omega^2 (x^2 + y^2) / r \quad (6)$$

permet de réécrire :

$$\begin{cases} x'' - 2\omega y' = \frac{\partial V}{\partial x} \\ y'' + 2\omega x' = \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad (7)$$

Les points du plan  $xOy$  vérifiant  $dV / dx = dV / dy = 0$  que l'on appelle les "points de Lagrange" sont des points d'équilibre, en ce sens qu'une particule qui est abandonnée avec une vitesse nulle y demeure au repos, son accélération étant nulle.

Remarquons ici que l'usage dans la littérature est de faire l'apport d'Euler. On s'y conformera désormais.

## 2 - Localisation des points de Lagrange.

(1) (2) et (6) fournissent la relation :

$$V(r_1, r_2) = G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) + G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \cdot \frac{x^2 + y^2}{r} \quad (8)$$

Par dérivation (3) donne (8<sub>1</sub>) et (8<sub>2</sub>)

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{1}{r_1} (x + \mu R / m_1) & \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{1}{r_2} (x - \mu R / m_2) \\ \frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1} & \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2} \end{cases}$$

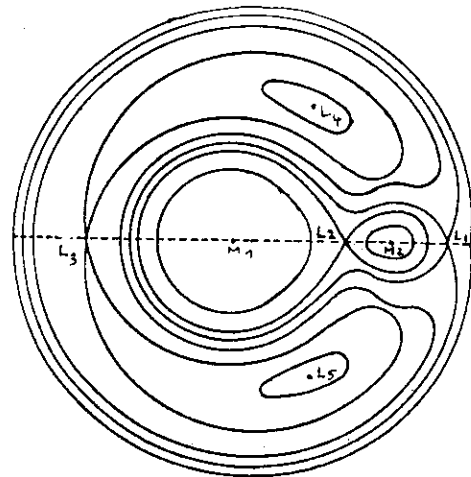
et (8) fournit alors (8<sub>3</sub>) et (8<sub>4</sub>)

$$\begin{cases} \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = x \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right)\right) + \mu R \cdot \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \\ \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = y \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right)\right) \end{cases}$$

Les points de Lagrange sont donc les solutions du système, formé des relations (9<sub>1</sub>) et (9<sub>2</sub>) :

$$\begin{cases} x \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right)\right) + \mu R \cdot \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = 0 \\ y \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

fig.2



points de Lagrange et lignes de niveau du champ V

• Pour  $y \neq 0$

$$(9_2) \text{ fournit : } \frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) = 0 \quad (10)$$

qui reportée dans (9<sub>1</sub>) livre  $r_2 = r_1$  (11) d'où par (10)

$R = r_1 = r_2$  ce qui correspond aux points de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$ .

• pour  $y = 0$  : en posant  $\theta = m_2 / m_1$  et  $u = 1 - \theta$  (12)

l'équation (9<sub>1</sub>) se simplifie en :

$$x(u^2 r_1^2 r_2^2 - uR^3(r_2^3 + \theta r_1^3)) + \theta R^4(r_1^3 - r_2^3) = 0 \quad (13)$$

$$\text{et (3) en } r_1 = |x + \theta R / u| \text{ et } r_2 = |x - R / u| \quad (13_1)$$

On se limitera à la recherche de  $L_1$  ( $R / u = x_{M_2} < x$ ) pour laisser au lecteur le loisir de traiter  $L_2$  ( $\theta R / u = x_{M_1} < x < x_{M_2} = R / u$ ) puis  $L_3$  ( $x < x_{M_1} = -\theta R / u$ ).

(13) devient alors :

$$u^2 \cdot (x - x_{M_1}) \cdot (x - x_{M_2}) \cdot P_\theta(x) = 0 \text{ avec}$$

$$P_\theta(x) = u^4 x^5 + 2u^3(\theta - 1) R x^4 + u^2(\theta^2 - 4\theta + 1) R^2 x^3 - u(\theta^3 + 5\theta^2 + \theta + 1) R^3 x^2 - (2\theta^4 + 4\theta^3 - \theta^2 - 4\theta - 2) R^4 x - u^2(\theta^2 - \theta + 1) R^5 \quad (14)$$

dont on peut montrer qu'il possède une unique racine réelle  $> x_{M_2}$ .

Par exemple pour le système  $M_1 = \text{Terre}$  ;  $M_2 = \text{Lune}$  on a  $\theta = 0,0123$  et  $P_\theta(x) = 0$  admet la solution  $x \approx R \cdot 1,15625$ . La fig. 2 donne pour  $M_1 = \text{Soleil}$  et  $M_2 = \text{Jupiter}$  quelques équipotentielles de  $V$  et les positions des cinq points de Lagrange.

### 3 - Résumé mathématique sur les systèmes différentiels.

• Une solution  $\psi$  du système différentiel (SD) :

$\frac{dz}{dt} = F(t, z)$ , définie pour  $t \geq 0$ , est dite stable lorsque

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 ; \forall \varphi$  solution de (SD) :

$$|\varphi(0) - \psi(0)| \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon$$

et asymptotiquement stable si de plus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0$$

•• la stabilité de la solution d'un système linéaire

$\frac{dz}{dt} = Az$  avec  $A$  matrice inversible de dimension  $(n, n)$ ,

dépend des signes des parties réelles des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ .

$\exists i : \text{Re } \lambda_i > 0 \rightarrow$  solution instable

$\forall i : \text{Re } \lambda_i \leq 0 \rightarrow$  solution stable

$\forall i : \text{Re } \lambda_i < 0 \rightarrow$  solution asymptotiquement stable

••• pour un système non linéaire (S) :

$\frac{dz}{dt} = A \cdot z + f(t, z)$  de système linéaire associé (L) :

$\frac{dz}{dt} = Az$ , avec  $A$  comme dans ••, et  $f(t, z) \underset{z \rightarrow 0}{=} o(z)$  uni-

formément pour  $t \geq 0$  :

$\exists i \text{ Re } \lambda_i > 0 \rightarrow$  solution nulle instable

$\forall i \text{ Re } \lambda_i < 0 \rightarrow$  solution nulle asymptotiquement stable.

Dans les autres cas la considération du système linéarisé (L) ne permet pas de conclusion générale.

### 4 - Stabilité des points de Lagrange.

En un point de Lagrange  $L(x_0, y_0)$  on pose  $x = x_0 + \xi$   
 $y = y_0 + \eta$  et le système différentiel (7) se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \\ \ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \end{cases} \quad (15)$$

On note :  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}$  ;  $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_{yy}$  ;  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = V_{xy}$ .

La formule de Taylor :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \xi \cdot V_{xx} + \eta \cdot V_{xy} + O(\xi^2 + \eta^2) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \xi \cdot V_{xy} + \eta \cdot V_{yy} + O(\xi^2 + \eta^2) \end{cases}$$

permet d'écrire le système différentiel (15) sous une forme matricielle  $\frac{d}{dt} Z = AZ + B$  adaptée au § 3 •••

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_{xx} & V_{xy} & 0 & 2\omega \\ V_{xy} & V_{yy} & -2\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O(\xi^2 + \eta^2) \\ O(\xi^2 + \eta^2) \end{pmatrix}$$

avec comme polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 + (4\omega^2 - V_{xx} - V_{yy}) \lambda^2 + (V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2) \quad (16)$$

Les dérivations de (8<sub>3</sub>) et (8<sub>4</sub>) donnent les équations (17<sub>1</sub>), (17<sub>2</sub>), (17<sub>3</sub>) :

$$\begin{cases} \frac{1}{G} I_{xx} = \frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left( \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) + 3 \cdot \left( \frac{(xm_1 + \mu R)^2}{m_1 r_1^5} + \frac{(xm_2 - \mu R)^2}{m_2 r_2^5} \right) \\ \frac{1}{G} I_{yy} = \frac{m_1 + m_2}{R^3} - \left( \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) + 3y^2 \left( \frac{m_1}{r_1^5} + \frac{m_2}{r_2^5} \right) \\ \frac{1}{G} I_{xy} = 3y \left( \frac{m_1 x + \mu R}{r_1^5} + \frac{m_2 x - \mu R}{r_2^5} \right) \end{cases}$$

On va (d'abord dans le cas  $L_4$  et  $L_5$  ensuite dans celui de  $L_1, L_2$  et  $L_3$ ) s'intéresser aux parties réelles des valeurs propres de  $A$  connaissables par  $\chi_A$ , car elles peuvent donner la clé de la stabilité (cf. § 3 •••)

• en  $L_4$  on a  $r_1 = r_2 = R$  ;  $y = \frac{R\sqrt{3}}{2}$  ;

$x = \frac{\mu R}{2} \cdot \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)$  donc on obtient (18<sub>1</sub>), (18<sub>2</sub>), (18<sub>3</sub>) :

$$\begin{cases} \frac{1}{G} \cdot V_{xx} = \frac{3(m_1 + m_2)}{4R^3} \\ \frac{1}{G} \cdot V_{yy} = \frac{9(m_1 + m_2)}{4R^3} \\ \frac{1}{G} \cdot V_{xy} = \frac{3\sqrt{3}(m_1 - m_2)}{4R^3} \end{cases}$$

ce qui donne pour le discriminant  $\Delta$  du trinôme en  $\lambda^2$  qu'est  $\chi_A(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= (G^2 m_1^2 / R^6) \cdot (\theta^2 - 25\theta + 1) \\ &= (G m_1 / R^3)^2 (\theta - \theta_1) (\theta - \theta_2) \end{aligned} \quad (19)$$

avec  $\theta_1 = \frac{25 - 3\sqrt{69}}{2} \approx 0,04$  et  $\theta_2 = \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2} \approx 25$ .

→ pour  $\theta \in ]\theta_1 ; \theta_2[$  on a donc  $\Delta < 0$ . Les 4 racines complexes sont alors non nulles, conjuguées deux à deux, opposées deux à deux. Il y en a donc 2 qui ont une partie réelle strictement positive.

**Il y a donc instabilité des points de Lagrange  $L_4, L_5$ .**

→ pour  $\theta \in ]0 ; \theta_1[ \cup ]\theta_2 ; +\infty[$  on a  $\Delta > 0$  et, grâce à (18) on a la factorisation (20) :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + \frac{Gm_1}{2R^3}(1+\theta + \sqrt{\theta^2 - 25\theta + 1}))(\lambda^2 + \frac{Gm_1}{2R^3}(1+\theta - \sqrt{\theta^2 - 25\theta + 1}))$$

qui montre que les quatre valeurs propres de A sont imaginaires pures. En conséquence, **la linéarisation ne permet pas de conclure quant à la stabilité des points de Lagrange  $L_4, L_5$ .**

Une théorie mathématique plus sophistiquée, répondant aux questions que Poincaré avait débroussaillées, permettrait de conclure à la **stabilité** de  $L_4, L_5$  pour  $\theta$  dans cette zone, c'est le **théorème KAM** de 1962 (Kolmogorov, Arnold, Moser).

L'expérience montre, du reste, cette stabilité. Citons les 417 (à ce jour) planètes Troyennes (pour le couple Soleil / Jupiter,  $\theta \approx 1047$ ), l'astéroïde 5261 Eurêka (pour le couple Soleil / Mars,  $\theta \approx 3 \times 10^7$ ).

Pour les couples Soleil / Saturne, et Soleil / Uranus, les récentes recherches américaines sont sans succès à cette date.

Après les points  $L_4, L_5$  (dits "triangulaires") passons à  $L_1, L_2, L_3$  (dits "colinéaires"). Rappelons que la sonde d'observation solaire SOHO est en  $L_2$  (dit "intérieur"). Notre numérotation est celle de Szebehely (biblio), il n'y a pas unanimité dans la littérature.

•• en  $L_1$  on avait (cf. 13) :

$$x \cdot \left[ \frac{u}{R^3} - \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{\theta}{r_2^3} \right) \right] + \frac{\theta}{u} R \cdot \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \text{ et } y = 0.$$

$x > 0 ; \theta = m_2 / m_1 > 0 ; r_1 - r_2 = R > 0 ; u = 1 + \theta > 0$   
donc  $\frac{u}{R^3} - \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{\theta}{r_2^3} \right) < 0$ .

Mais (17<sub>123</sub>) se réécrivent ici, puisque  $x + \theta R / u = r_1$  et  $x - \theta R / u = r_2$ , (22<sub>1</sub>, 22<sub>2</sub>, 22<sub>3</sub>) :

$$\begin{cases} \frac{1}{Gm_1} \cdot V_{xx} = \frac{u}{R^3} - \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{\theta}{r_2^3} \right) - 3 \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) = \frac{\mu}{R^3} + 2 \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{\theta}{r_2^3} \right) \\ \frac{1}{Gm_1} \cdot V_{yy} = \frac{u}{R^3} - \left( \frac{1}{r_1^3} + \frac{\theta}{r_2^3} \right) \\ V_{xy} = 0 \end{cases}$$

avec  $V_{xx} > 0$  et  $V_{yy} < 0$ .

On a donc  $V_{xx} \cdot V_{yy} - V_{xy}^2 < 0$  ce qui garantit (cf.16) la factorisation :

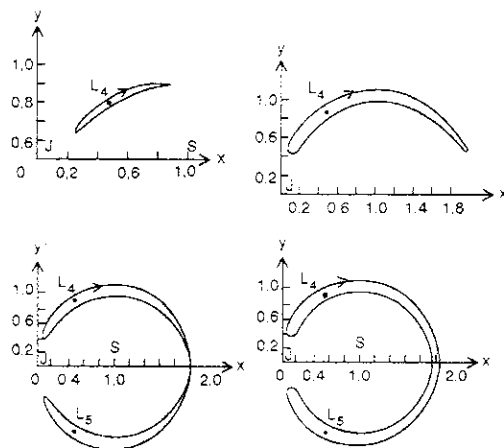
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 - \Lambda_1) (\lambda - \sqrt{\Lambda_2}) (\lambda + \sqrt{\Lambda_2})$$

$\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  réels positifs.

La valeur propre  $\lambda = \sqrt{\Lambda_2}$  est réelle positive d'où l'instabilité.

**Il y a donc instabilité des points de Lagrange  $L_1, L_2, L_3$ .**

fig.3



quelques mouvements possibles pour les Troyens  
( $M_1 / M_s = 95875 \times 10^{-6}$ )

#### Bibliographie

- ♦ G. PASCOLI : Eléments de Mécanique Céleste ; Colin 1993
- ♦ I. PETERSON : Le Chaos dans le Système Solaire ; Belin, Pour la Science, 1995.
- ♦ J. LASCAR et C. FROESCHLE : Le Chaos dans le Système Solaire, La Recherche 232, mai 1991.
- ♦ J.L. CHABERT et A. DAHAN DALMEDICO : H. Poincaré, le précurseur, La Recherche 232, mai 1991.
- ♦ V. SZEBEHELY : Theory of Orbits ; Academic Press 1967 & Adventures in Celestial Mechanics ; Univ of Texas Press, Austin.
- ♦ B.B. & J. HUBBARD : Loi et Ordre dans l'Univers : le théorème KAM ; pour la Science 188, juin 93. ■