Un simulateur de cadran solaire

ou comment concilier géométrie, astronomie et bricolage

L'ombre au sol de la pointe du style d'un cadran solaire horizontal, décrit dans la journée une courbe qui est toujours une conique ou, exceptionnellement, une droite. Sous nos latitudes, ces coniques sont toujours des hyperboles, les autres formes n'apparaissant qu'au-delà des cercles polaires. Sur les cadrans que l'on peut observer dans nos villes, nous ne voyons jamais d'ellipse ni de parabole. C'est pourquoi il est très intéressant de reproduire ces situations avec un simulateur qui permettra de visualiser la trajectoire du Soleil sous différentes latitudes, ainsi que les ombres portées sur un plan horizontal.

1 Les différents types de coniques d'un cadran solaire horizontal

Un cadran solaire a toujours son style orienté selon l'axe de rotation terrestre ; on dit qu'il est horizontal quand son plan est parallèle à l'horizon (figure 1). Ces cadrans solaires donnent l'heure ; mais ils peuvent aussi nous informer sur la saison et même sur le mois de l'année. Les lignes horaires correspondent à l'heure et la lecture de l'ombre de la pointe du style, le premier jour de chaque saison, nous informe de l'époque de l'année. Tout de suite, nous centrerons notre intérêt sur ce second aspect en étudiant les types de courbes décrites.

Afin de faciliter le raisonnement, nous supposons qu'un seul rayon lumineux part du Soleil ; quand ce rayon de lumière touche la pointe du style, une ombre se forme. A mesure que le Soleil décrit sa trajectoire dans la journée, le rayon enveloppe une surface conique dont l'axe de rotation correspond à l'axe terrestre (figure 2). Les sections produites par le plan du cadran solaire, un jour donné, sont les courbes décrites ce jour là par l'ombre de la pointe du style. Les courbes du premier jour de chaque saison sont généralement dessinées sur le plan du cadran solaire : printemps, été, automne et hiver. On trouve aussi fréquemment les lignes qui correspondent au premier jour de chaque signe du zodiaque.

Évidemment, on peut penser que la largeur du style est nulle, comparée à la distance de la Terre au Soleil. Il est alors admissible de supposer que le style et la Terre sont un seul point au centre de la sphère céleste.

L'angle central du cône, α, dépend du parallèle où se trouve le Soleil, c'est-à-dire de la déclinaison D du Soleil (figure 3). L'angle du cône est $\alpha = 90° - D$, et il change tous les jours avec la déclinaison du Soleil.

Les différentes courbes produites par l'intersection du cône de révolution avec le plan du cadran solaire dépendent des valeurs relatives de l'angle du cône α et de l'angle d'inclinaison du plan du cadran β (figure 4). Afin de relier les angles α et β à la classification des coniques nous calculerons l'excentricité en fonction de ces angles.

En fait, on entend par conique la section d'une surface de révolution conique, comme le cône décrit par le mouvement diurne du Soleil, avec un plan π, comme le plan du cadran solaire. Le plan occupant différentes positions au cours du temps, une conique différente est déterminée à chaque occasion. Nous allons maintenant classer les coniques en calculant l'excentricité selon la latitude du lieu ϕ, ainsi que la déclinaison du Soleil D, qui varie d'un jour à l'autre.

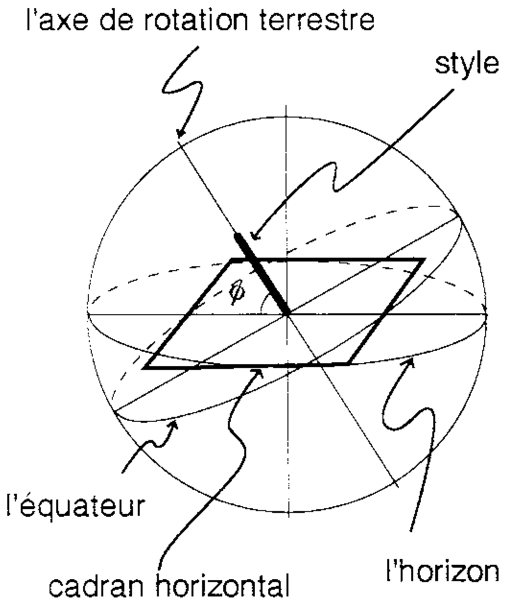


Figure 1

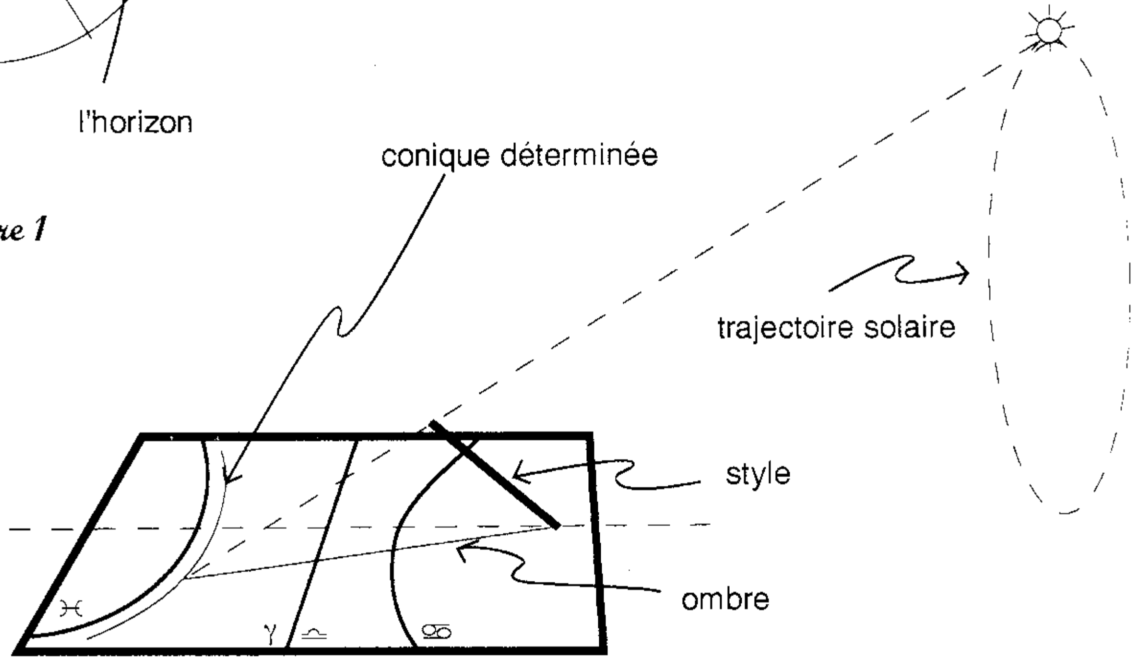


Figure 2

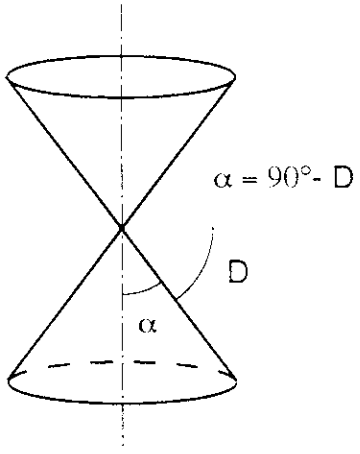


Figure 3

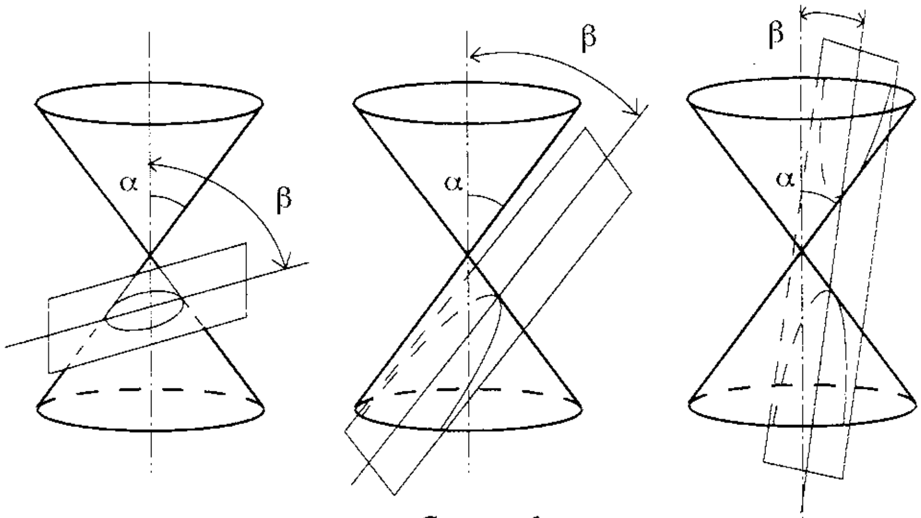


Figure 4

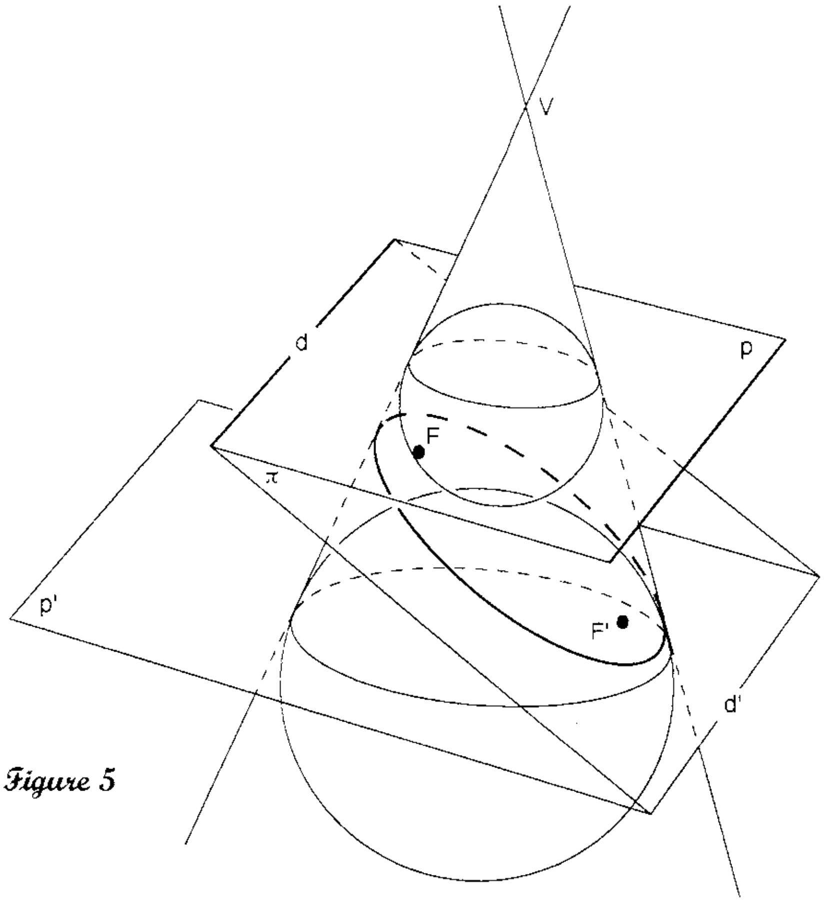


Figure 5

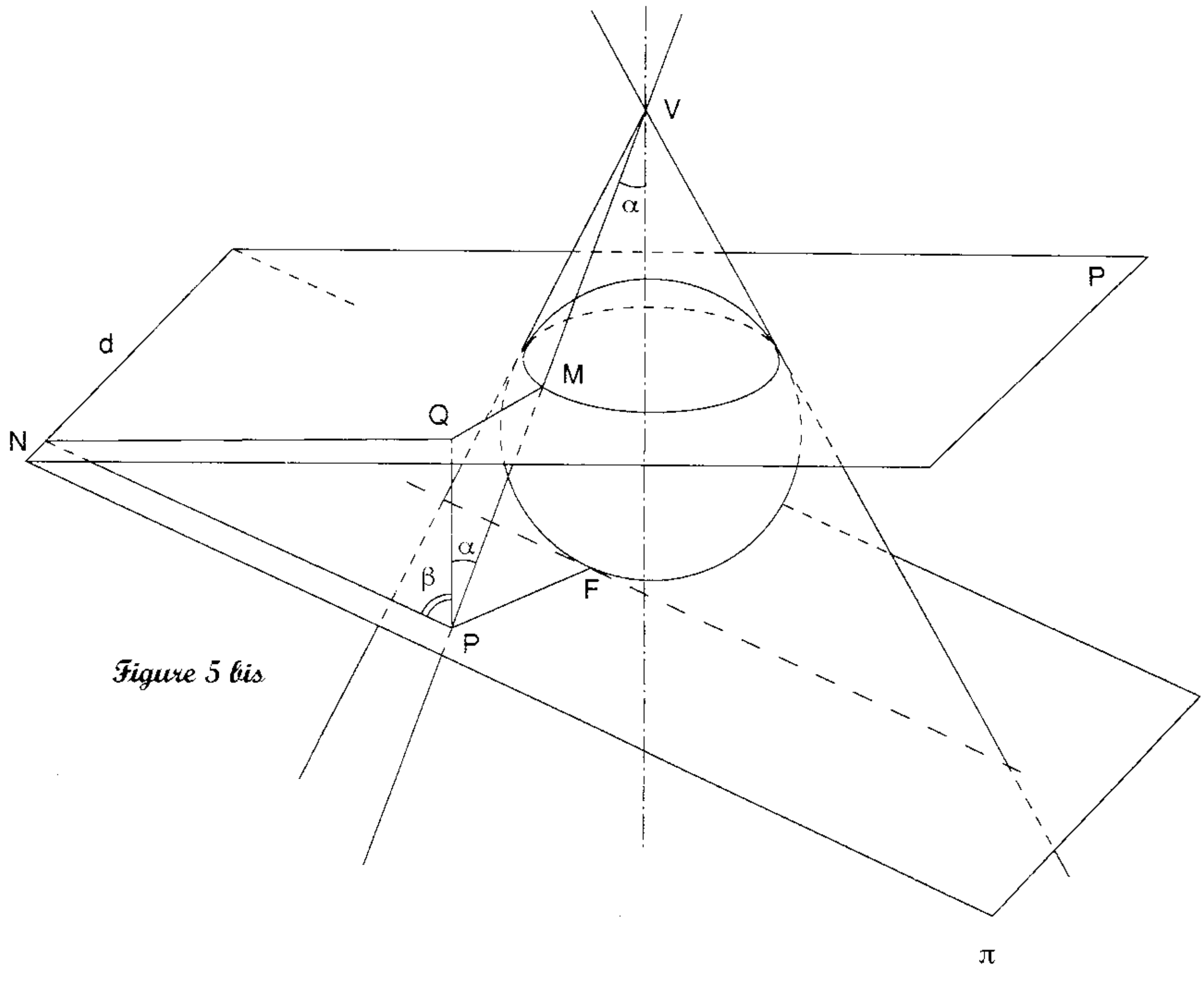


Figure 5 bis

On note V le sommet du cône. Afin de rappeler la définition de l'excentricité d'une conique, il nous faut parler au préalable de foyer et de directrice. On appelle foyers d'une conique les deux points de contact F et F', des sphères inscrites dans la surface conique et tangentes à π, avec le plan π de la conique. Les sphères inscrites déterminent, sur la surface conique, des circonférences de contact de plans p et p'. Les lignes droites d et d', intersections de ces plans avec le plan π de la conique, sont les droites directrices de la conique ; d est dite associée à F (et d' à F'). Les figures 5, 6 et 7 nous montrent que l'ellipse et l'hyperbole ont deux foyers et deux directrices et que la parabole n'a qu'un foyer et qu'une directrice.

L'excentricité d'une conique est le quotient (constant) de la distance PF (d'un point courant P de la conique au foyer F) par la distance PN (de P à la directrice d associée à F), où N désigne le projeté orthogonal de P sur d ; on a une formule analogue pour F' et d'.

$$e = \frac{PF}{PN} = \frac{PF'}{PN'}$$

Nous allons exprimer maintenant l'excentricité e de l'ellipse. Considérant ce point courant P de l'ellipse, nous nommons Q son projeté orthogonal sur p (ainsi la droite (PQ) est parallèle à l'axe du cône), et M le point d'intersection de p avec la génératrice (VP) du cône (figure 5bis). La distance PQ vérifie alors :

$$PQ = PN \cos \beta$$
$$PQ = PM \cos \alpha$$

α étant l'angle du cône et β l'angle de l'axe du cône avec le plan π.

Comme les segments de tangentes à la sphère,issus de P ont des longueurs égales, on a PM = PF.

Donc $PF \cos \alpha = PN \cos \beta$

D'où l'excentricité:

$$e = \frac{PF}{PN} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

et, en procédant de manière analogue, le résultat similaire pour l'autre foyer et l'autre directrice.

L'excentricité étant $e < 1$, sur l'ellipse, et la fonction cosinus étant décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, nous avons $0 < \cos\beta < \cos \alpha < 1$ donc $\beta > \alpha$ pour les ellipses.

En appliquant le raisonnement précédent à l'hyperbole de la figure 6 ou à la parabole de la figure 7 et en conservant les mêmes notations, on peut établir que l'excentricité est toujours égale à ce même quotient de cosinus. Dans le cas de l'hyperbole où $e > 1$, on aura $\beta < \alpha$. Pour la parabole où $e = 1$, on aura $\beta = \alpha$.

La direction du style étant parallèle à celle de l'axe de rotation terrestre, l'angle qu'il fait avec le plan du cadran solaire est donc la latitude ϕ (figure 1) qui est égale à l'angle β d'inclinaison du plan qui détermine la section. Comme, par ailleurs, nous savons que l'angle du cône α vérifie $\alpha = 90°- D$, nous pouvons classer les courbes du cadran horizontal selon la déclinaison D du Soleil, pour chaque jour de l'année, et la latitude ϕ du lieu. Nous avons alors :

$$e = \frac{\cos |\Phi|}{\sin |D|}$$

en tenant compte des valeurs absolues puisqu'il n'est pas raisonnable ici d'utiliser les angles avec un signe.

En conséquence, on peut classer les coniques selon le rapport constant entre l'angle du cône, c'est-à-dire la déclinaison D et l'angle d'inclinaison du plan, c'est-à-dire la latitude du lieu ϕ.

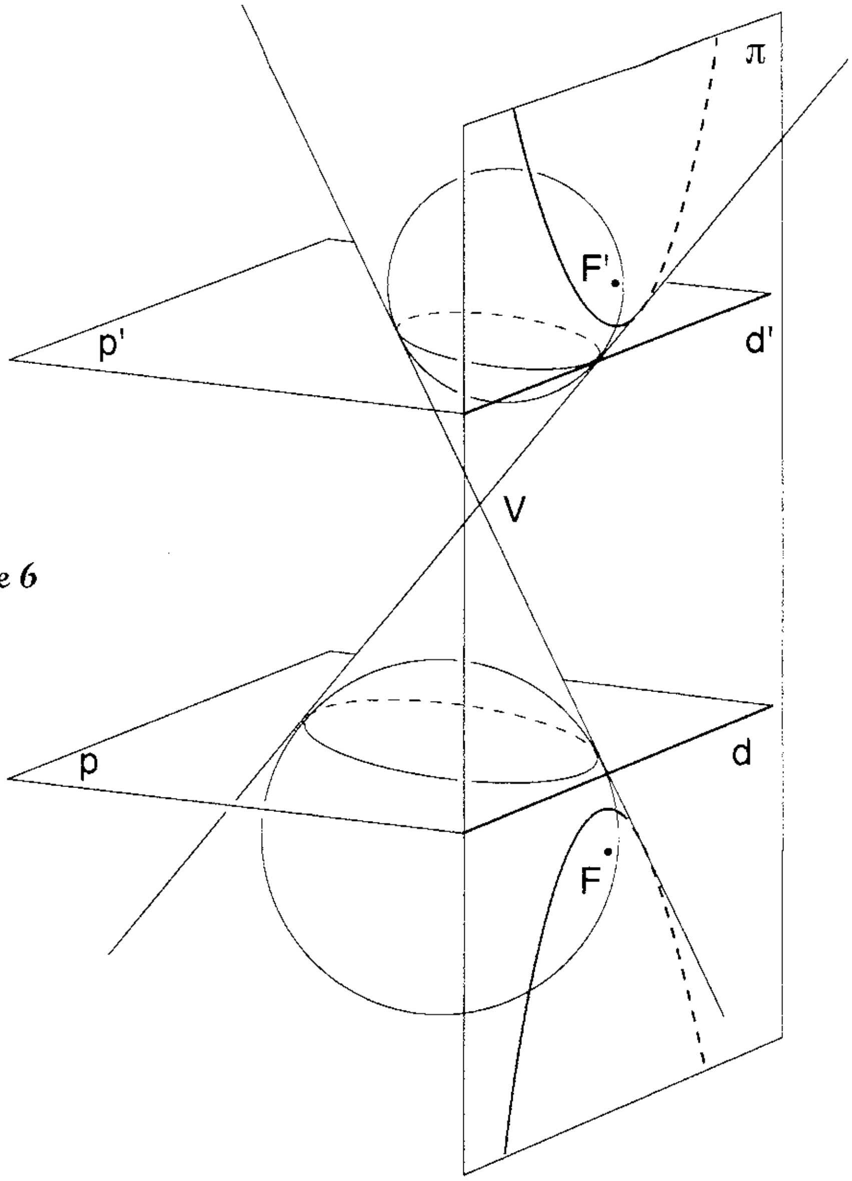
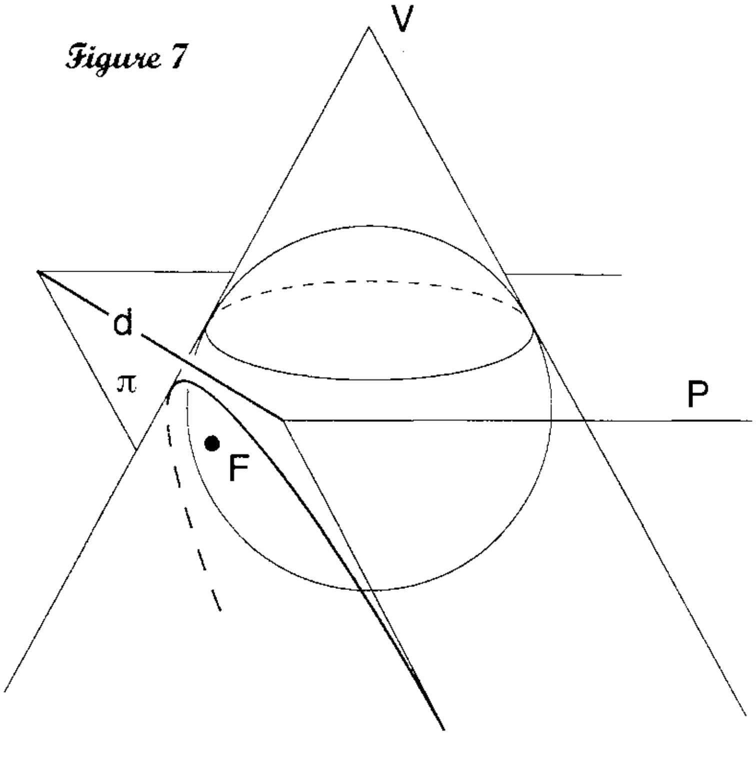


Figure 6

Figure 7



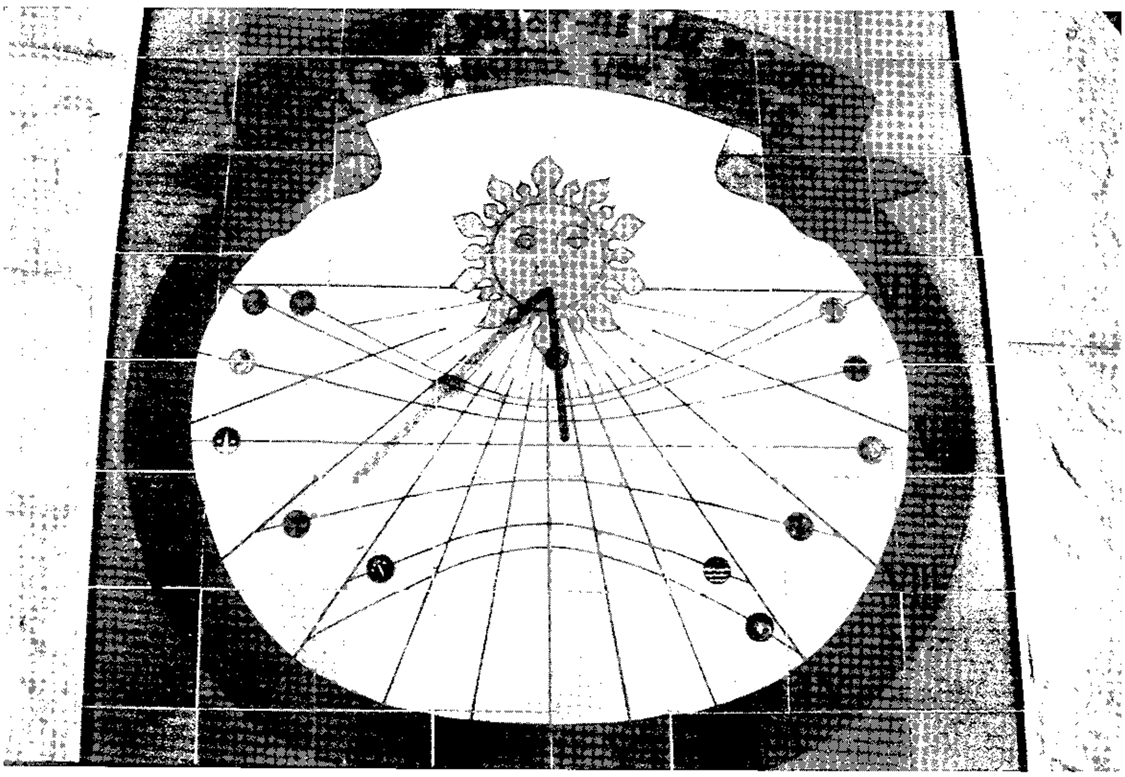
Le premier jour de l'été ou le premier jour de l'hiver, la déclinaison D du Soleil est telle que $|D| = 23{,}5°$. Alors $\alpha = 66{,}5°$, et pour cette valeur, on a :

si $\alpha = 66{,}5° < \beta = \phi$, des ellipses ;
si $\alpha = 66{,}5° = \beta = \phi$, des paraboles ;
si $\alpha = 66{,}5° > \beta = \phi$, des hyperboles.

En résumé, pour les cadrans horizontaux situés dans un lieu de latitude ϕ, on a :
- **des ellipses si $\phi > 66{,}5°$**
- **des paraboles si $\phi = 66{,}5°$**
- **des hyperboles si $\phi < 66{,}5°$**

Par exemple, comme on peut l'observer sur la photographie ci-dessous qui représente un cadran horizontal à Barcelone, de latitude $\phi = 41{,}5°$, les courbes d'été et d'hiver sont des hyperboles (figure 8).

Sur le plan des cadrans horizontaux, en plus des courbes citées, il y a aussi des droites. Le Soleil étant deux jours par an dans le plan de l'équateur, il faut savoir que, à ce moment-là, la trajectoire du rayon lumineux ne décrit pas un cône mais un disque (figure 9). Le premier jour du printemps et le premier jour de l'automne, quand le Soleil a une déclinaison nulle, la surface conique se réduit à un disque dans l'équateur. L'intersection du disque avec le plan du cadran horizontal nous donne alors une ligne droite.



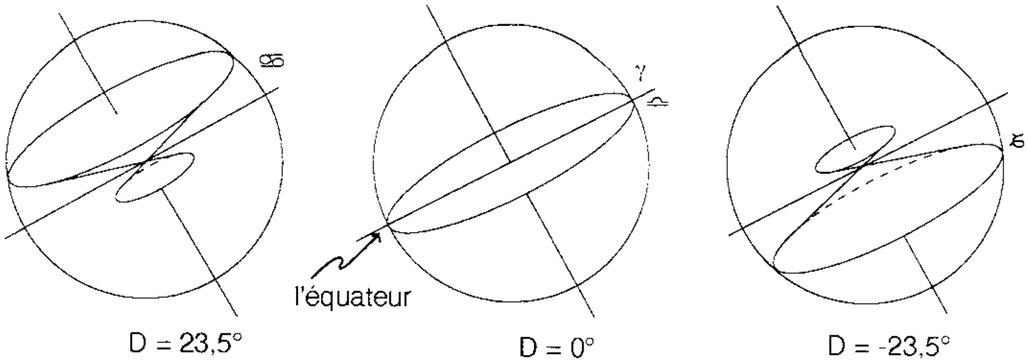


Figure 9

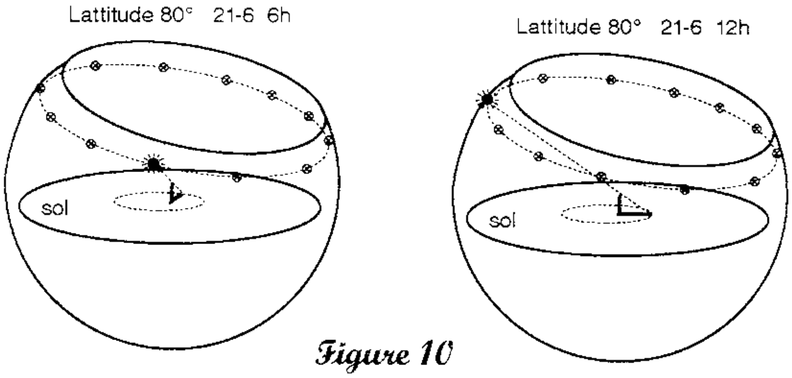
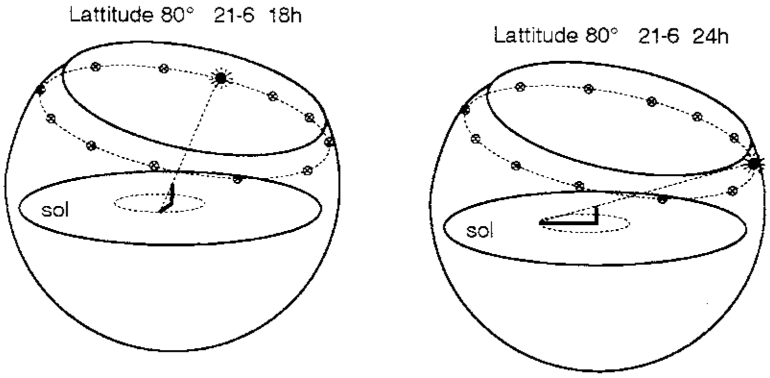


Figure 10



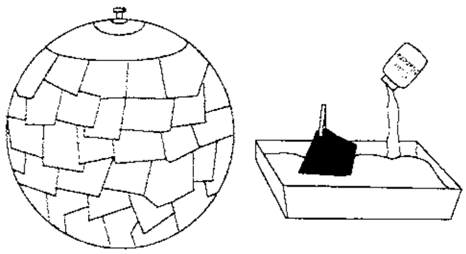


Figure 11

2 Dispositif de visualisation des coniques

Sous nos latitudes, et plus généralement en tout lieu situé hors des zones polaires limitées par les cercles polaires, l'extrémité de l'ombre portée par le style sur une surface horizontale parcourt, au long de la journée des hyperboles, qui deviennent des lignes droites les jours des équinoxes. Les autres coniques n'apparaissent que dans les régions polaires. Donc nous ne pouvons pas les observer. Si nous voulons expliquer à nos élèves non seulement la situation d'une conique (peut être peu compréhensible au niveau de l'enseignement secondaire obligatoire) mais en essayant qu'ils voient et comprennent comment et pourquoi apparaissent les différentes coniques on n'a pas d'autre solution que de faire appel à des simulateurs reproduisant le mouvement du soleil par rapport à l'horizon, et les ombres produites sous toutes les latitudes : car l'observation réelle exigerait la présence de nos élèves, pendant plusieurs mois, dans des pays septentrionaux comme par exemple la Finlande, ce qui n'est pas facile.

Une possibilité consiste à utiliser un programme d'ordinateur qui dessine la position et la longueur des ombres dans chaque cas, mais son utilisation n'est pas moins artificielle ; et on ne voit pas directement la relation entre le mouvement apparent du soleil et la position des ombres.

Le problème peut être résolu avec la construction d'un simulateur permettant de mimer la position du Soleil à des heures, des dates et des latitudes déterminées, en allumant une lampe placée dans cette position qui produise les ombres correspondantes. Ce simulateur a l'avantage de permettre de visualiser aussi bien la position du Soleil que celle des ombres, d'une façon directe, rapide et de la même façon qu'on le verrait depuis n'importe quel endroit de la Terre.

Au Lycée de Baccalauréat "Angela Figuera" de Sestao on a conçu et construit un simulateur qui permet de réaliser ces observations : des commutateurs permettent de sélectionner l'une de quatre dates correspondant au solstices ou équinoxes (où l'on trouve les positions les plus significatives), et l'heure ; alors qu'une autre commande permet de choisir n'importe quelle latitude de l'hémisphère nord.

Si on le place pour la latitude du pôle nord pendant le solstice d'été, on obtient les positions du Soleil toutes les deux heures, et on voit l'ombre produite par un gnomon vertical, dont l'extrémité détermine un cercle.

Si l'on change légèrement la latitude, mais en restant à l'intérieur de cercle polaire, et en répétant le processus tout au long des 24 heures, on obtient une ellipse, ainsi que l'on peut constater sur les graphiques de la figure 10.

Mais à la latitude 66,5° à cette même date, l'un des sommets de l'ellipse se déplace vers l'infini, car le Soleil se trouve à l'horizon à 0 heure, et on observe une parabole ; pour les latitudes inférieures, c'est une hyperbole.

Si l'on sélectionne les dates des équinoxes, on peut s'apercevoir que depuis n'importe quelle latitude (sauf au pôle lui même) l'extrémité de l'ombre dessine une ligne droite.

3 Construction du simulateur

3.1 - Support sphérique

On a besoin d'une sphère de dimension suffisamment grande (au moins 75 cm environ de diamètre), avec une calotte en moins pour pouvoir observer à l'intérieur, et qui représentera la voûte céleste, sur laquelle on placera ensuite de petites lampes dans les positions convenables.

Si l'on ne trouve pas une sphère appropriée on peut la fabriquer en utilisant un ballon gonflable comme moule, avec des morceaux de papier journal imprégné avec de la colle blanche très diluée (figure 11). En mettant plusieurs couches on arrive à lui donner une grande consistance, et quand il est sec on le dégonfle et on extrait le ballon par la partie supérieure qui n'a pas été recouverte. Bien que ce soit plus cher, on peut le réaliser avec d'autres matériaux tels que bandage plâtré, papier mâché ou fibre de verre.

Figure 12

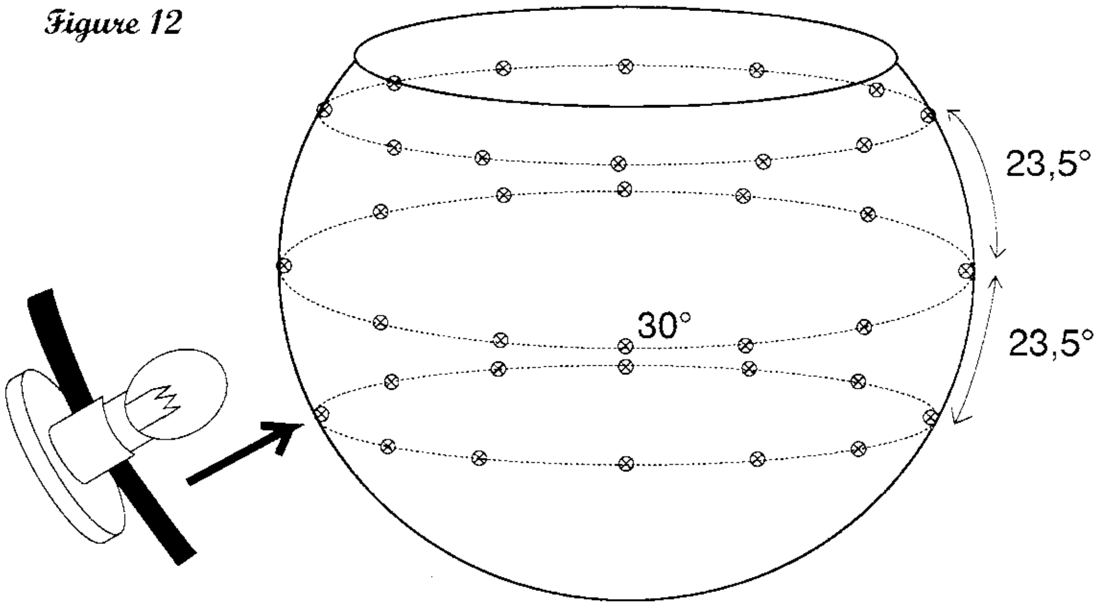
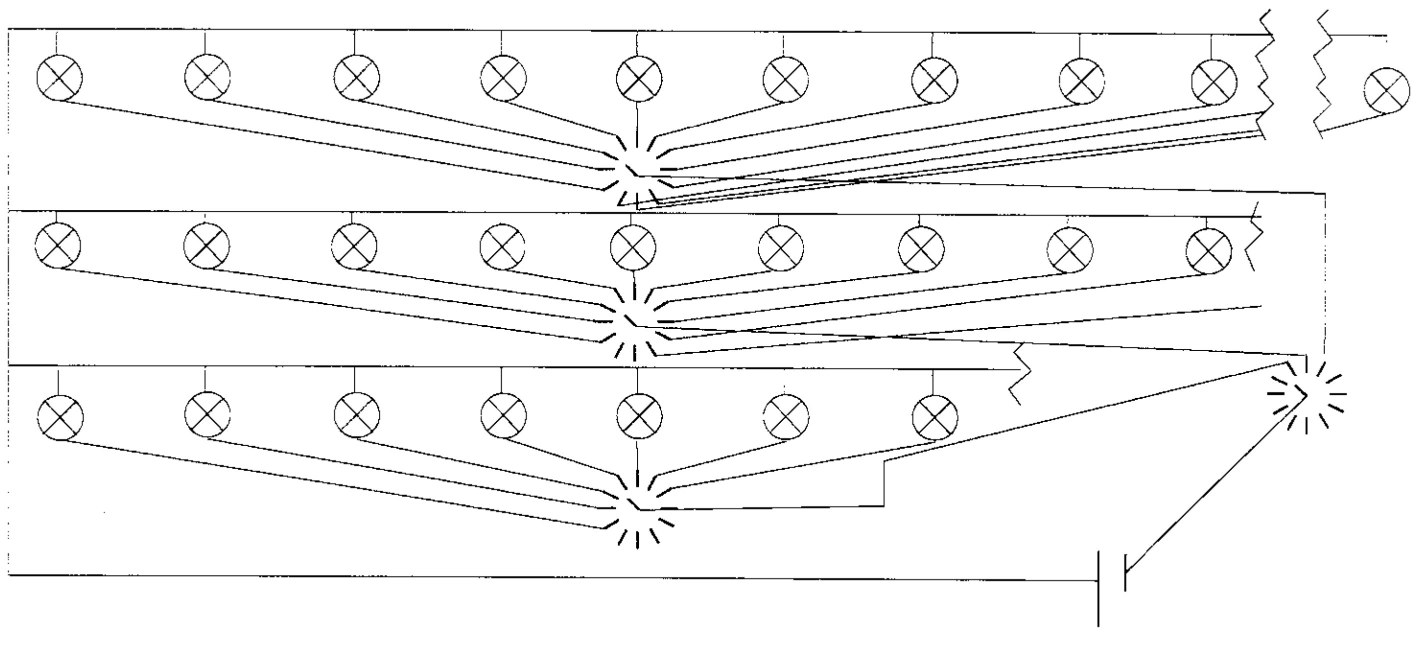


Figure 13 Schéma électrique



3.2 - Disposition des lampes

Sur un grand cercle de cette sphère, parallèle à la calotte retirée, et qui représentera l'équateur céleste, on place 12 ampoules à des intervalles de 30° ; elles simulent les positions du soleil pendant les équinoxes toutes les deux heures.

On fait de même sur deux autres cercles parallèles à une distance de 23,5° qui correspondront aux positions du Soleil aux solstices. Après avoir déterminé les positions de ces ampoules, on perce des petits trous sur la sphère où l'on introduira les porte-lampes nécessaires pour placer de petites ampoules de lampe de poche de 3,5 volts, qui produiront des ombres nettes même dans un lieu à moitié sombre (figure 12).

3.3 - Circuit électrique

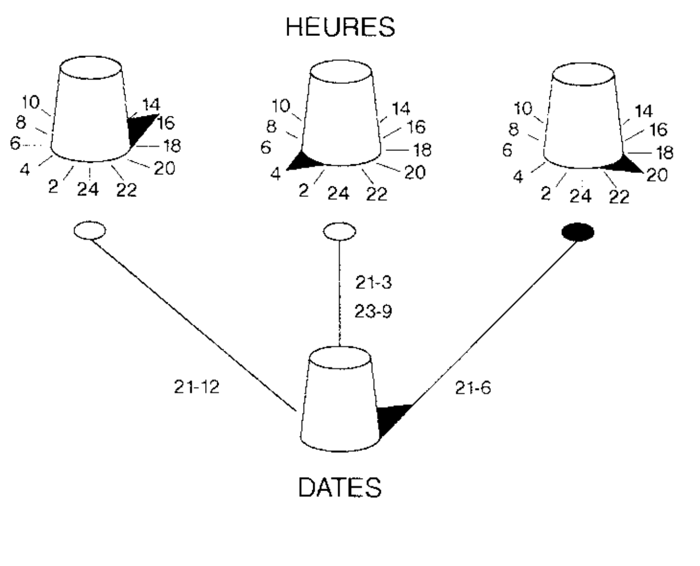
Les connexions électriques sont réalisées selon le schéma de la figure 13, et pour les commandes qui sélectionnent la date et l'heure, on peut utiliser quatre commutateurs rotatifs (d'un circuit à 12 positions) que l'on peut trouver dans les commerces de composants électroniques. Avec l'un d'entre eux on sélectionne la date, ce qui conduit le courant vers le commutateur des heures de cette date ; lequel fait la distribution vers la lampe correspondant à l'heure sélectionnée. Après avoir sélectionné cette date, sur les trois commutateurs horaires il n'y a que le commutateur approprié qui fonctionne. Pour rendre plus claire cette situation, on peut ajouter un voyant lumineux à côté de chaque commutateur horaire, de telle façon que celui qui est sélectionné et en service, soit allumé (figure 14). Dans ce cas, le commutateur des heures doit avoir deux circuits et au moins 3 positions.

Le plus convenable serait d'utiliser un seul commutateur pour les heures au lieu de 3, mais pour cela il faut un commutateur de 3 circuits et, au moins, 12 positions, ce qui n'est pas facile à trouver.

La source d'alimentation peut être une pile ou un petit transformateur.

Le câblage devrait être fait avec des fils de couleur où chaque couleur puisse servir de guide ; et il est situé sur la partie extérieure de la sphère en laissant un certain jeu à la longueur des câbles, pour permettre le pivotement de la sphère.

Figure 14



4 - Mise en place de l'axe et du sol

La mise en place de la sphère avec l'ouverture de la partie supérieure horizontale représente la situation au pôle nord, où le parcours journalier du Soleil est parallèle à l'horizon. Pour obtenir les positions correspondantes à une autre latitude, tout l'ensemble doit pouvoir basculer ; il faut donc ajouter un axe avec une poignée pour faire pivoter toute la sphère. La mise en place de l'axe peut se faire suivant les indications de la figure 15, et doit être près des lampes correspondant à 6 heures et à 18 heures de l'équinoxe, qui sont les seuls qui ne doivent pas changer de position quand on modifie la latitude. On peut y ajouter une échelle pour indiquer la latitude.

A l'intérieur de la sphère on place un cercle plat en bois qui représente la position du sol, et au centre, un petit style ou une horloge solaire.

Le plan du sol n'est pas à la hauteur de l'axe, mais un peu plus bas de telle sorte que l'extrémité du style occupe le centre de la sphère sur la prolongation des axes.

Le sol doit rester horizontal bien que toute la sphère tourne ; et on y arrive grâce à son propre poids, en fixant le cercle avec deux fils de fer en forme de "U" renversé qui s'appuient sur les porte-lampes de 6 heures et 18 heures des équinoxes.

Enfin, on peut placer tout l'ensemble sur un support parallélépipédique en bois en guise de table, où l'on a fait un trou circulaire pour contenir largement la partie inférieure de la sphère. (figure 16)

Une autre possibilité permettant de visualiser les différentes coniques, peut consister à construire plusieurs voûtes fixes ; chacune pour la latitude qui correspond à une conique différente, similaires au module décrit auparavant ; mais en remplaçant les lampes par des cordons qui, partant de la position du Soleil toutes les heures, passent, tous, par l'extrémité du style et continuent en ligne droite vers le sol sur le même point qui serait atteint par l'ombre du gnomon. Ainsi on voit la double surface conique dont l'intersection avec le sol détermine le cercle, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole ou ligne droite, selon les cas. (figure 17).

figure 15

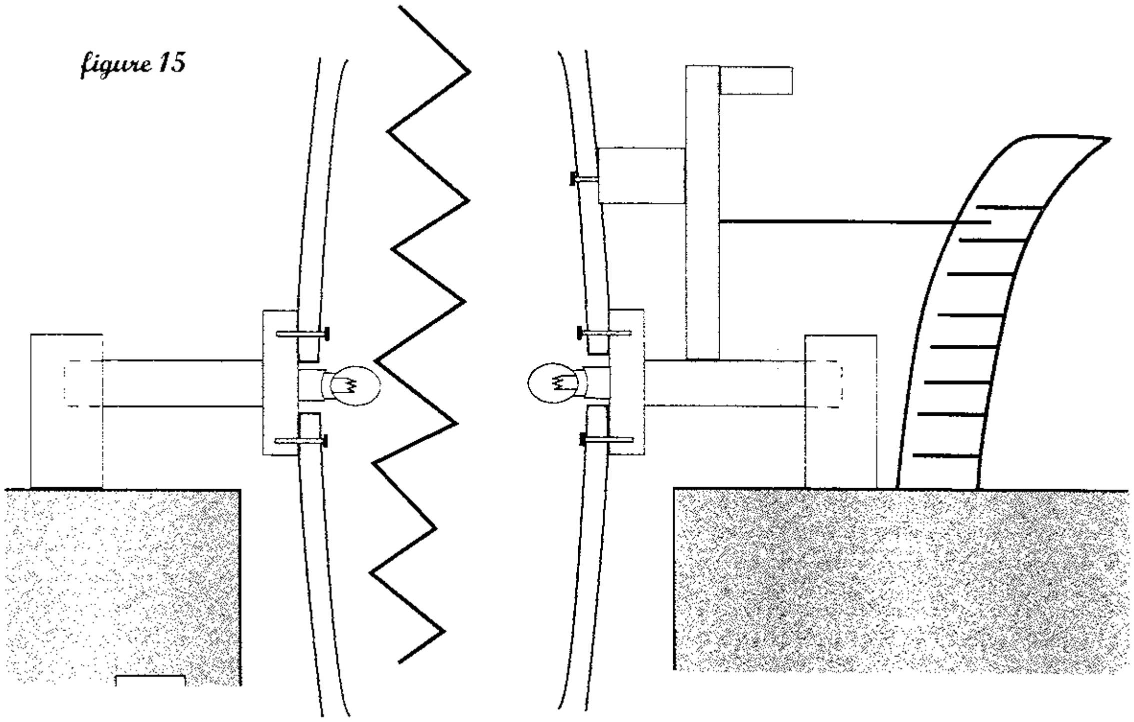
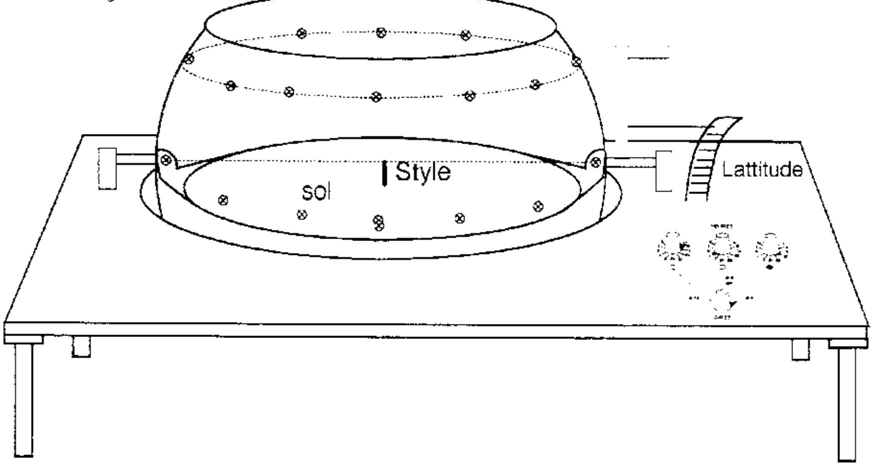


Figure 16



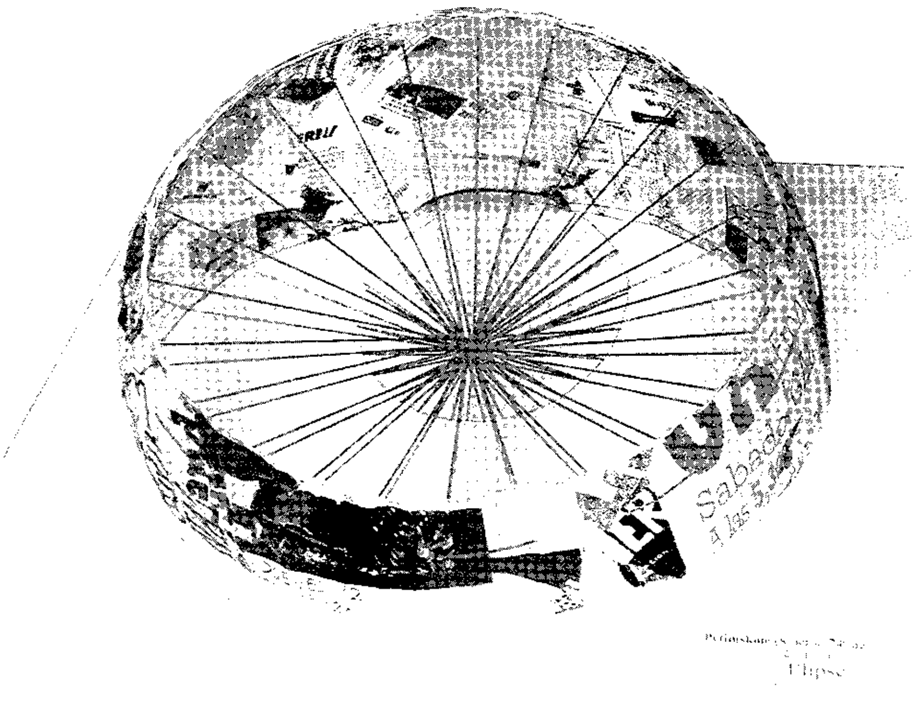


Figure 17

Esteban Esteban, "I.B. Angela Figuera",
Sestao Rosa M. Ros,
Universitat Politècnica de Catalunya,
Barcelona

■