Mathématique et astronomie

Séquence de formation
des stagiaires de mathématiques de 2ième année d'IUFM

Nos collègues Gérard Frizet et Michel Lemenicier, professeurs de mathématiques respectivement au lycée Ed. Branly et au lycée Rotrou de Dreux nous présentent leur travail, effectué à l'IUFM de Chartres en mai 1997.

Descriptif de l'atelier

- Présentation visuelle (diapos, maquettes, vidéo) du système solaire et en particulier des comètes en utilisant les événements astronomiques de l'année (comète Hale-Bopp, opposition de Mars, rétrogradation des planètes,mission Magellan)
- Utilisation de planétaires héliocentriques
- Tracé d'orbites circulaires décentrées et de l'orbite de la comète Hale-Bopp au voisinage du Soleil.
- Utilisation d'éphémérides (banque de données)
- Calcul de petits angles et de vitesses (utilisation d'une calculatrice programmable)

Organisation :
- 1ère séance (3h) : présentation du système solaire et des comètes, jeu-test.
- 2ième séance (3h) : histoire des idées sur le système solaire, planétaires, tracés, calculs.
- 3ième séance (3h) : utilisation de maquettes et de l'ordinateur ; travaux d'élèves en lycée.

Matériel : calculatrice (si possible programmable) , rapporteur circulaire, papier millimétré
Prérequis : aucun

Préparation demandée aux stagiaires :
- noter les faits d'actualité (TV, revues) en rapport avec les sujets abordés
- s'informer sur le système solaire (idées anciennes et récentes)
- repérer des énoncés d'exercices d'astronomie dans des livres scolaires de math (de la 6ième à la terminale).

I - Représentation en trois dimensions de l'orbite de Hale - Bopp

Le but du TP est de représenter, en trois dimensions, une partie de l'orbite de Hale-Bopp à proximité du Soleil, ainsi que les orbites des planètes Terre et Mars puis d'utiliser cette maquette pour répondre à certaines questions.

Matériel nécessaire : crayon, règle, compas, rapporteur, calculatrice, deux feuilles de papier ou de carton, ciseaux.
Notions mathématiques abordées (à adapter selon les niveaux) : angles orientés, cercle, ellipse, parabole, tableau de données, courbe d'une fonction paire, repère de l'espace, rotation, changement de repère, trigonométrie, distance de deux points, proportionnalité, pour les changements d'unité.

1 - Sur la feuille n°1 :

- dessiner l'orbite de la Terre assimilée à un cercle centré sur le Soleil S et de rayon représentant une unité astronomique. On choisira comme unité 5 cm pour 1 u.a..

- Tracer une demi-droite [Sγ) à partir de laquelle on mesurera les angles orientés.

- Placer les points T_1, T_2, T_3, correspondant aux positions de la Terre respectivement les 23 mars, 1er avril et 6 mai 1997, sachant que les longitudes héliocentriques de la Terre étaient respectivement 183°, 192°, 227°.

- pour tracer l'orbite de Mars, on utilisera un cercle excentré :

• La longitude du périhélie étant 336°, tracer une demi-droite [SP) telle que ([Sγ), [SP)) = - 24°.

• Le demi-grand axe est a = 1,524 u.a, l'excentricité est e = 0,0934 ; placer le centre O de l'ellipse (assimilée au cercle excentré) tel que SO = e × a et O, S, et P soient alignés dans cet ordre.

• Tracer le cercle de centre O et de rayon a.

- Placer la Terre et Mars sur leurs orbites le 17 Mars 1997 sachant que leur longitude commune était 177° et mesurer la distance séparant les deux planètes lors de cette opposition (donner le résultat en millions de km).

- La longitude du noeud ascendant Ω de la comète est 282°; tracer la droite des noeuds en utilisant la direction du noeud descendant N telle que ([Sγ), [SN)) = 102°.

2 - Sur la feuille n°2 :

- Placer le Soleil au centre et tracer un repère orthonormal direct $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

- Tracer l'orbite de la comète Hale-Bopp, assimilée dans le voisinage du Soleil à un arc de la parabole d'équation : $y = 0{,}276\, x^2 - 0{,}914$.

- Placer sur cette parabole les points H_1 et H_2 d'abscisses respectives - 0,34 u.a et 0 u.a. Construire H_3 point de la parabole tel que $([SH_2), [SH_3)) = 49°$: la droite (SH_3) est la ligne des noeuds ; H_1 est la position de la comète le 23 mars (date à laquelle elle s'est approchée le plus près de la Terre ; H_2 est sa position le 1er avril (date de passage au périhélie) et H_3 est sa position le 6 mai (date du passage au noeud descendant N, dans le plan de l'écliptique).

3 - Mesurer la distance SH_3 (c'est à dire SN) sur la feuille 2 et placer $N = H_3$ sur la feuille 1. Mesurer la distance T_3H_3 et calculer la distance (en km) séparant les deux astres le 6 mai.

4 - Pour la visualisation en trois dimensions :

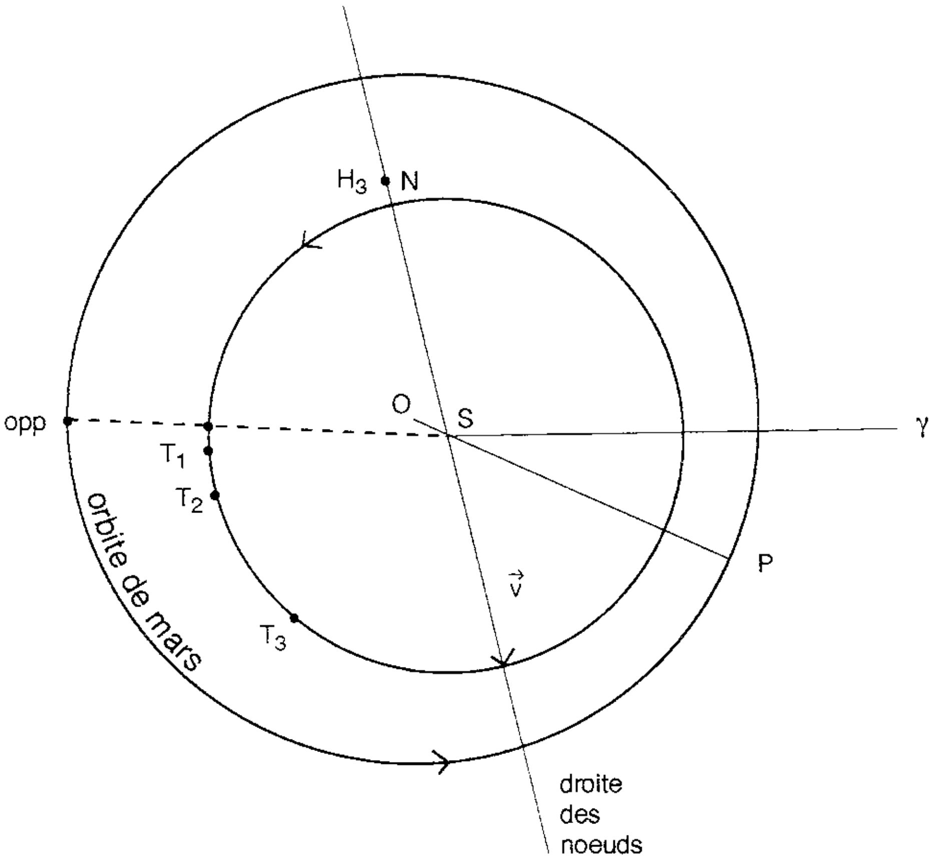
L'angle du plan de l'orbite et du plan de l'écliptique est 89, 43°. On peut donc considérer que ces deux plans sont perpendiculaires.

Entailler la feuille 1 sur la droite (H_3S) : couper le segment ne contenant pas S qui va du bord de la feuille jusqu'à S_3 ; puis entailler la feuille 2 : couper le segment contenant S qui va du bord de la feuille jusqu'à H_3 : faire coïncider ces entailles en tenant les deux feuilles perpendiculaires de façon à ce que le point H_2 de la feuille 2 soit vu « au-dessus » de la feuille 1.

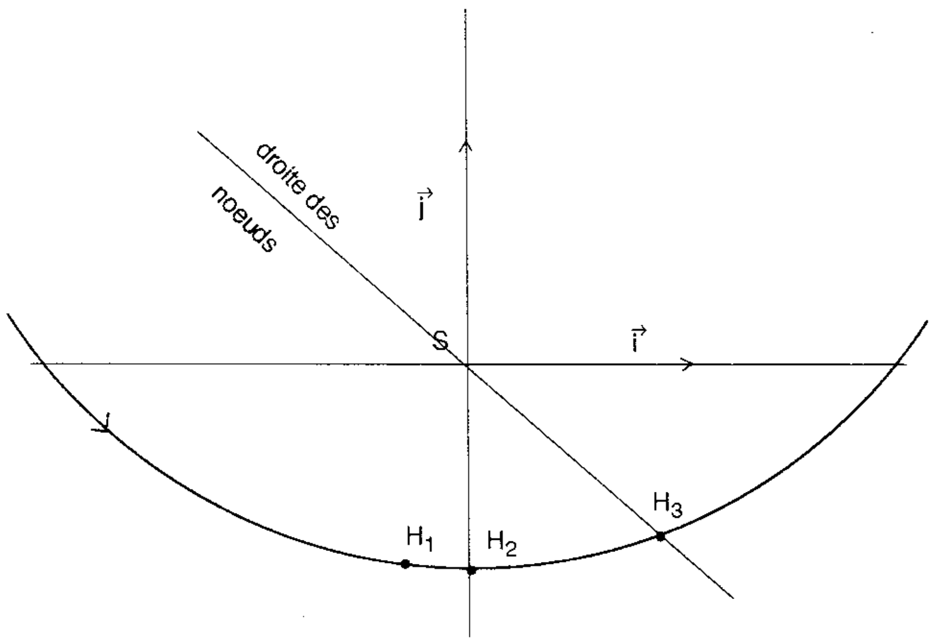
5 - Utilisation du repère orthonormal de l'espace $(S, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$(S, \vec{v}, \vec{w})$ est l'image de $(S, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation de centre S et d'angle 139° sur la feuille 2 et $(S, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère direct sur la feuille 1. ($\vec{v}$ a même direction et même sens que la demi-droite [SΩ)).

Vérifier que les coordonnées de T_1 sont (en u.a) environ (0,988 ; - 0,156 ; 0) et que celles de H_1 sont environ (0 ; - 0,32 ; 0,887). Calculer alors la distance T_1H_1 en km.



feuille 1



feuille 2

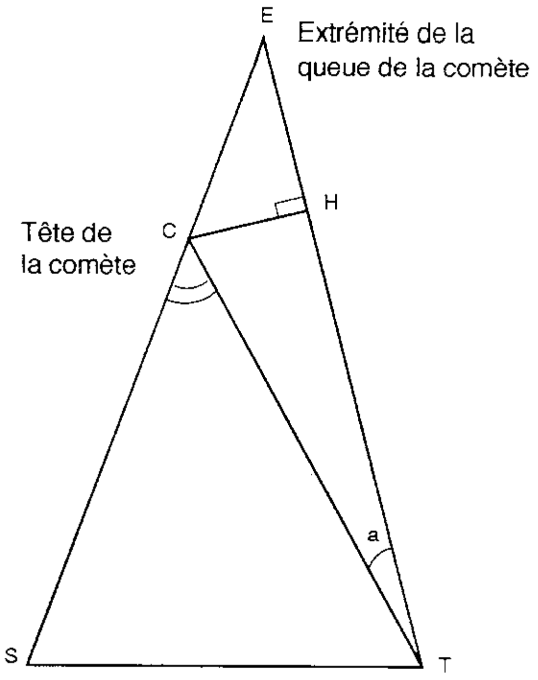


fig 1

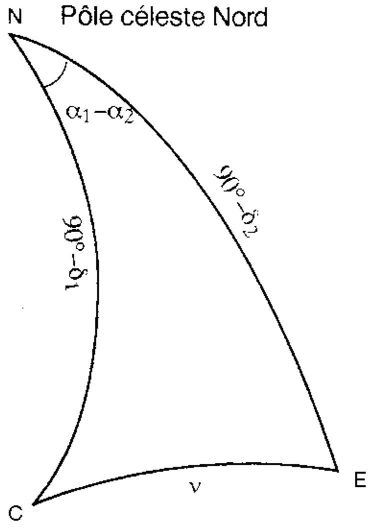


fig 2

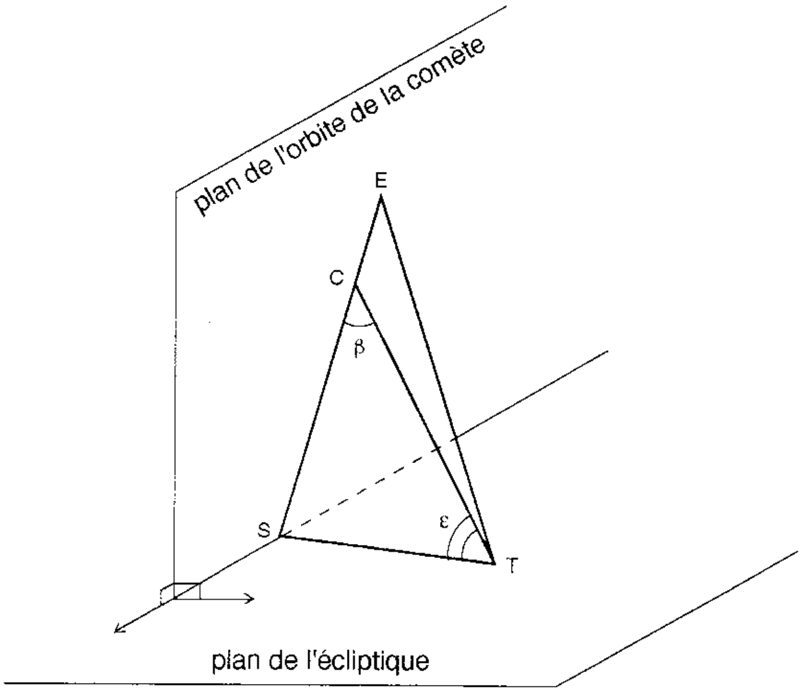


fig 3

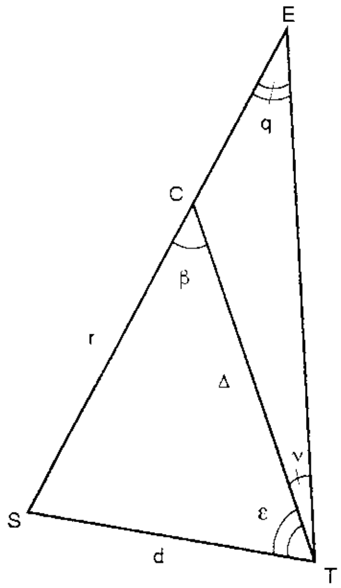


fig 4

II - Petits problèmes pour aller plus loin sur les comètes.

1 - Problème A : longueur de la queue de la comète Hale-Bopp.

Niveau seconde :
Sur une photo prise le 28 Mars 97, on a mesuré la queue (bleue de plasma) de la comète : 6cm. En utilisant les étoiles de la constellation de Cassiopée visible sur la photo on a pu établir que 2cm sur la photo correspondaient à un angle de 4,9°.

Calculer l'angle a sous lequel est vue la queue CE de la comète. Calculer successivement l'angle e = SET et les longueurs CH et CE en km. CT $\approx 199 \times 10^6$ km et l'angle SCT mesure 48,7° (fig.1).

Niveau première S (ou supérieur) :
C est la tête de la comète (noyau), E est une étoile vue par transparence à travers la queue et située approximativement à son extrémité. On connaît les coordonnées équatoriales de C à cette date (α_1, δ_1) et celles de l'étoile E (α_2, δ_2).
Alors la longueur angulaire apparente de la queue vue depuis la Terre est l'angle v donné par la relation : $\mathbf{\cos v = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$. (fig.2)

On pose : r = CS (distance comète-Soleil) ; d = ST (distance Soleil-Terre) ; Δ = CT ;
ε = élongation de la comète ; β = angle de phase de la comète (fig.3). Les distances sont exprimées en u.a (1 u.a $\approx$ 149,6 millions de km.). On peut trouver d, r, ε dans les éphémérides. La donnée supplémentaire de β (ou de Δ) permet de calculer Δ (ou β) avec le théorème d'Al-Kashi : dans le triangle SCT, la formule : $\mathbf{d^2 = r^2 + \Delta^2 - 2r\Delta \cos\beta}$ permet de calculer β (fig.4).

Si v est donné ou calculé, alors dans le triangle CET, avec q = β - v, on peut trouver la longueur CE de la queue de la comète en utilisant la formule des sinus : $\mathbf{CE / \sin v = \Delta / \sin q}$

Question 1 : le 17 mai 1997 on peut lire dans les éphémérides :
d = 1,01 u.a ; Δ = 2,041 u.a ; r = 1,215 u.a. Calculer β et ε.

Question2 : le 1^er^ Avril 1997, la comète passait au périhélie à 3h TU. La queue était vue depuis la Terre sous un angle d'environ 16° ; Δ = 1,353 u.a ; β = 47,4°. A la radio, un journaliste enthousiaste a dit que la longueur de la queue dépassait la distance Terre-Soleil. A-t-il exagéré ?

Question3 : le 27 Mars 1997, l'extrémité de la queue de la comète passe près de l'étoile Ruchbah (δ Cassiopée), de coordonnées équatoriales α_2 = 1h 9,3 mn ; δ_2 = 45°36,5'. Calculer la longueur apparente v au demi-degré près. Sachant qu'à cette date on a $\beta \approx 48{,}5°$ et $\Delta \approx 1{,}325$ u.a calculer la longueur de la queue en millions de km.

2 - Problème B : utilisation de la maquette réalisée lors du TP

Le jour où la comète traverse l'écliptique au noeud descendant, elle est dans une constellation du zodiaque : laquelle ? Où se trouve la Planète Mars ce jour là ? Estimer les distances Terre-Mars, Mars-comète et Terre-comète ce jour là à l'aide de la maquette. Contrôler éventuellement sur des éphémérides.

3 - Problème C : l'orbite réelle de la comète Hale-Bopp

C'est une ellipse de foyer S et d'excentricité e = 0,995 ; la distance au Soleil de la comète lors du passage au périhélie est : SP = 0,914 u.a. Trouver, en u.a, le demi-grand axe a. Quelle est en années terrestres sa période de révolution ?

4 - Problème D : vitesse de la comète

D'après la deuxième loi de Kepler, la vitesse de la comète est variable : elle est donnée par la formule : $v = \mu\sqrt{2/r}$ avec $\mu \approx 29{,}8$; r est la distance au Soleil en u.a.
Calculer sa vitesse le 1er Avril et le 17 mai 1997, puis lors du passage à l'aphélie.

Gérard Frizet ■
Lycée Ed Branly, 29, avenue J.F.Kennedy, 28100 Dreux.

Solutions des petits problèmes

Problème A : longueur de la queue de la comète Hale-Bopp
- niveau seconde : 6cm sur la photo représente un angle a = 14,7°.
Donc e = 48,7° - a = 34°.
Alors dans le triangle rectangle CHT : CH = CT sin a et dans le triangle CHE : CE = CH / sin e.
$CE \approx 90{,}3 \times 10^6$ km.
- niveau première S :
1 - le 17 mai 97 : $\cos\beta = (r^2 + \Delta^2 - d^2) / 2r\Delta \approx 0.932$ donc $\beta \approx 21{,}269°$. $\sin\varepsilon / r = r \sin\beta / d$ donc $\varepsilon \approx 25{,}873$.
2 - le 1er avril 1997 : $q = \beta - v = 31{,}4°$; $CE = \Delta \sin v / \sin q$ donc $CE \approx 0{,}716$ua soit 107×10^6 km.
3 - le 27 mars 1997 : 1h15mn = 18,75°; 1h9,3mn = 17,325° ; 45°36,5' ≈ 45,6°.
$\cos v = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ donc $v \approx 14{,}4°$.
$q = \beta - v \approx 34{,}3$; $CE = \Delta \sin v / \sin q$ donc $CE \approx 0{,}585$ua soit $87{,}5 \times 10^6$ km.

Problème B : utilisation de la maquette.
Le 6 mai 1997, la comète passait au noeud descendant N (ou H_3). La terre était en T_3 ;
on place Mars sur la feuille 1 : sa longitude est 199°. On mesure alors les distances MT_3, MH_3, T_3H_3, en cm et on utilise l'échelle du dessin. On trouve environ : 0,85 ; 2,05; 1,856.
La longitude de T_3 étant 227°, l'angle $(T\gamma, TS)$ mesure 47°. L'élongation de la comète est $(TS, TN) = \varepsilon = 29.8°$. Donc l'angle $(T\gamma, TN) = 76{,}8°$. Or, dans un repère géocentrique, la constellation du Taureau s'étend de 50° à 89°, à partir de $T\gamma$, sur l'écliptique.

Problème C : l'orbite réelle de la comète
C'est une ellipse de foyer S, d'excentricité e = 0,995; SP = q = 0,914 u.a. Or q = a - c et e = c/a. Donc a = q / (1 - e); a = 182,8ua ≈ 27×10^6 km.
D'après la 3ième loi de Kepler, si la période de révolution de la planète est T années, alors $a^3 / T^2 = 1$ (si a est exprimée en u.a et T en années terrestres).
Donc pour Hale-Bopp : $T = \sqrt{a^3} \approx 2471$ ans.

Problème D : vitesse de la comète
Le 1er avril, r = 0,914 donc v ≈ 44km/s. Le 17 mai, r = 2,041 donc v ≈ 29,5 km/s.
A l'aphélie, $r = 2 \times 182.8 - 0{,}914$ donc v ≈ 2,2km/s.