

# Le cadran solaire de Freeman (2)

Paul Perbost (Nice)

## 5. Voir l'heure au carrefour en toute latitude

### L'indicatrice des coordonnées horizontales

La parallèle à la méridienne, tracée sur la table (m) par le point  $i'$ , coupe son bord inférieur au point  $\Delta$  tel que

$$S\Delta = l \cos h \sin a \quad (\text{cf fig. 3})$$

Nommons cette droite "indicatrice des coordonnées horizontales" puisque son abscisse  $n'$  est fonction du couple (a,h), une fois l choisie. Nommons-la ( $i''$ ).

Toute translation de (m) effectuée parallèlement à la méridienne laisse cette indicatrice globalement invariante. De ce fait, elle conserve toute l'information que véhicule l'indicatrice. On peut donc faire glisser la table (m) sur un support horizontal fixe, dans la direction indiquée, sans altérer l'information qu'elle détient. Cette remarque est capitale pour la réalisation effective du cadran.

Il faudra naturellement disposer sur la table (m) un réseau de parallèles équidistantes, aussi fin que possible, dans la direction de l'indicatrice modèle que l'on vient de définir, afin que chacune des droites de ces réglures devienne à son tour une telle indicatrice en son temps.

A titre indicatif on peut considérer qu'un espacement régulier de l'ordre de 2,5 mm entre les barreaux de cette échelle assurerait une estimation correcte de la position du point  $\Delta$ . Une feuille de papier millimétré pourrait convenir, d'autant plus que ses traits régulièrement renforcés faciliteraient l'identification visuelle de l'indicatrice qui passerait au plus près de l'extrémité  $I'$  de l'ombre du gnomon.

Dans ce qui suit, nous examinerons comment ajuster les translations de (m) aux coordonnées  $H$  et  $\delta$  du Soleil. Nous allons voir qu'il suffit de munir le support horizontal de deux échelles fixes, l'une pour la déclinaison, l'autre pour l'angle horaire afin de pouvoir y déterminer l'heure. Ainsi, tandis que la table mobile (m) pourrait être nommée la table des coordonnées horizontales, emportant avec elle son gnomon orientable, le support fixe, désigné par (F), serait la table des coordonnées horaires.

## 6. Construction des lignes horaires et de l'échelle de déclinaison

### a) Lignes horaires

Précisons d'abord que l'on peut donner à m la forme carrée : soit O le centre de cette table mobile (fig.4). S et N désignent les points où l'indicatrice de type ( $i'$ ) passant par O traverse les bords de (m), N étant l'extrémité nord de ce segment indicateur. Il

convient évidemment de donner à (m) une épaisseur suffisamment mince, afin que son bord inférieur mn puisse sensiblement se confondre avec l'indicatrice de déclinaison ( $\delta$ ) basée sur la graduation  $E_\delta$  inscrite sur le bord BC de (F). Sur cette table fixe, les points U et V sont les extrémités de la droite située exactement à l'aplomb de SN : axe de symétrie pour le cadran, coïncidant avec la méridienne, elle portera naturellement le nom de ligne de midi et portera le n°12, également.

La construction des autres lignes horaires, sur (F), est alors réglée par l'égalité

$$S\Delta = l \cos \delta \sin H$$

une fois choisies les parallèles fixes PQ et P'Q', donc l'amplitude de  $E_\delta$ . Bien que ce choix soit arbitraire, nous attribuerons à leur écart, d, la même valeur que la longueur l. Par la suite donc, il sera convenu que  $l = d$  : ce n'est qu'une question de commodité.

La partie des segments horaires cachée par la table mobile est représentée en pointillés.

Si  $F_O$  est la trace de la ligne de midi sur PQ et  $F'_O$  sa trace sur P'Q',  $F_H$  (ou t) et  $F'_H$  les traces de la ligne horaire (H), alors

$$F_O F_H = l \sin H, \text{ puisque Q correspond à } \delta = 0^\circ$$

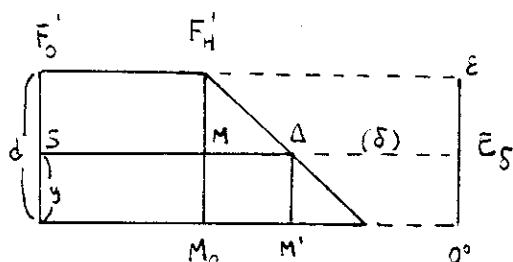
$$F'_O F'_H = l \cos \epsilon \sin H, \text{ puisque Q' correspond à } \delta = \epsilon = 23^\circ 27'$$

Alors, pour tracer les droites qui marquent les "heures rondes", numérotées 0, 1, 2, 3... 12 (heures PM), il suffit de donner à l'angle horaire H les valeurs successives  $0, 15^\circ, 2 \times 15, \dots, 12 \times 15$ , et de joindre systématiquement les points  $F_H$  et  $F'_H$ , dans le même ordre de succession. Remarquant, de plus, que  $\sin(180^\circ - H) = \sin H$ , on en conclut que toute droite horaire de numéro n doit porter aussi le numéro (12-n). Chacune de ces droites est ainsi associée à deux nombres de somme 12, sauf le n° 6 qui n'a pas lieu d'être redoublé.

En outre, puisque  $\sin(-H) = -\sin H$ , les droites horaires sont deux à deux symétriques par rapport à la ligne de midi. Il en résulte que la construction des heures (AM) procède de celle des heures (PM).

Dans l'exemple complet de l'échelle  $E_H$ , indiqué plus loin, des subdivisions intermédiaires sont tracées, de 10 mn en 10 mn. Mais, à mesure que l'on approche de 6 heures, l'espace entre deux lignes consécutives décroît rapidement. En conséquence, entre 4 h et 5 h (PM), elles ne sont marquées que de 20 mn en 20 mn et entre 5 h et 6 h, 30 mn suffisent. Il serait facile de justifier la décroissance des espaces considérés par différentiation des expressions de  $F_O F_H$  et  $F'_O F'_H$ . Bornons-nous à l'enregistrer.

### b) L'échelle de déclinaison



Observons les triangles semblables  $M_O F_H F'_H$  et  $M'_O F_H \Delta$ .

On en déduit la proportion

$$\frac{M'_O \Delta}{M_O F'_H} = \frac{M'_O F_H}{M_O F_H}$$

c'est à dire

$$\frac{y}{d} = \frac{l \sin H - l \sin H \cos \delta}{l \sin H - l \sin H \cos \epsilon}$$

On en déduit aussi

$$F_0 S = y = d \frac{1 - \cos \delta}{1 - \cos \epsilon}$$

Cette égalité règle la graduation de l'échelle  $E_\delta$ . Ne comportant que des cosinus, elle englobe à la fois les valeurs positives et négatives de la déclinaison. On peut indiquer ses divisions par intervalles de  $1^\circ$ , en accentuant la numérotation de celles qui marquent les multiples de  $5^\circ$ .

**c) Esquisse des échelles complètes  $E_H$  et  $E_\delta$**

La figure 6 donne un exemple de l'assemblage de ces échelles sous format réduit. Sa mise en place détaillée nécessite de nombreux calculs numériques. Convenablement programmés et soumis aux procédés modernes de tracés automatiques, leur réalisation effective s'en trouvera grandement facilitée.

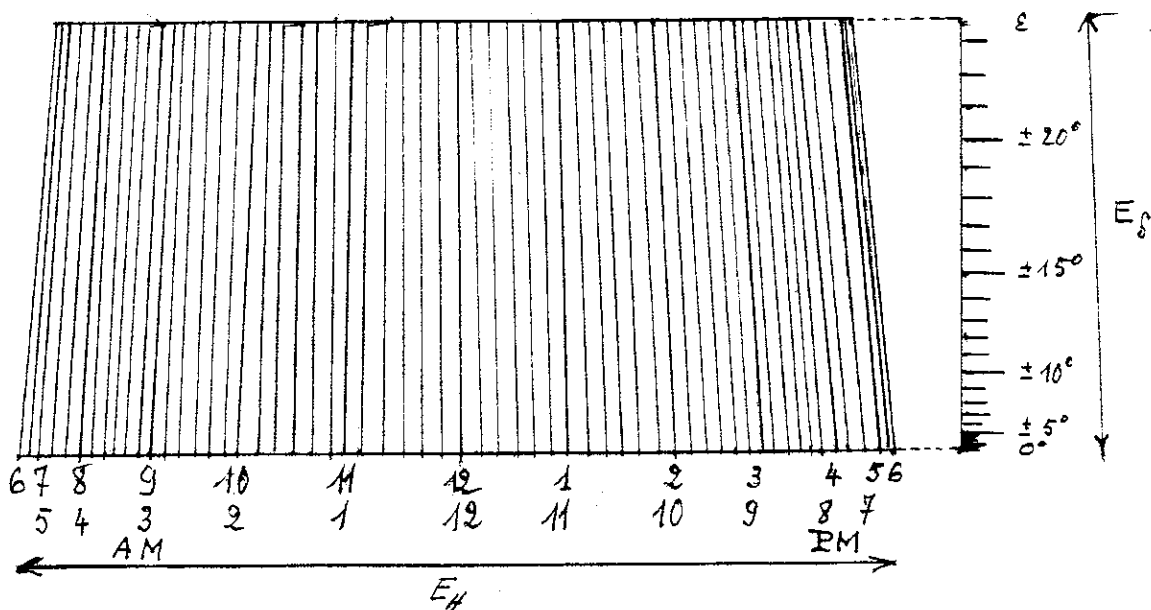


fig.6

**7. L'astroïde face à l'astre du jour**

Nous allons maintenant établir les équations du bord du gnomon courbe, dans le repère orthonormé (Oxy) (cf fig.3).

Le segment I'L' de longueur constante l, reste tangent à ce bord. De plus il coupe Ox en I' et Oy en L' tels que

$$OI' = l \cos h$$

$$OL' = l \sin h$$

Il s'agit donc de déterminer l'enveloppe de ce segment dont les extrémités se déplacent sur sur deux droites perpendiculaires données, Ox et Oy. Dans le repère considéré, la droite (I'L') a pour équation

$$\frac{x}{l \cos h} + \frac{y}{l \sin h} - 1 = 0$$

Pour déterminer son enveloppe, dérivons cette équation relativement à h :

$$-\frac{x \sin h}{\cos^2 h} + \frac{y \cos h}{\sin^2 h} = 0$$

On a donc à résoudre le système linéaire

$$\begin{aligned} \frac{x}{\cos h} + \frac{y}{\sin h} &= l \\ -\frac{x \sin h}{\cos^2 h} + \frac{y \cos h}{\sin^2 h} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

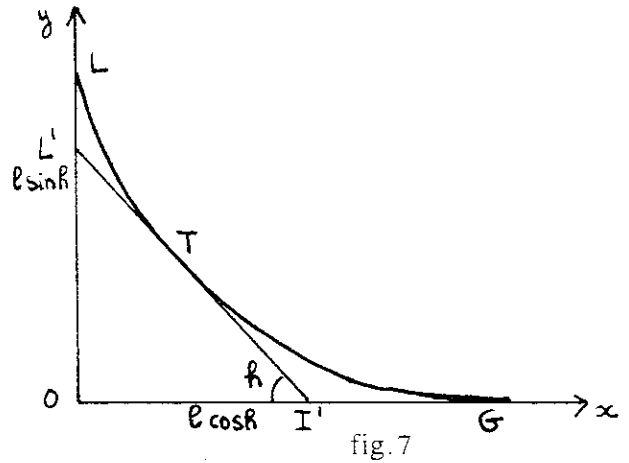
$$x = l \cos^3 h$$

$$y = l \sin^3 h$$

qui sont les équations paramétriques de la courbe cherchée dont l'équation cartésienne est

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

Cette courbe est connue sous le nom d'astroïde. Nous n'en représentons que le quart (fig.7).



### 8. Le gnomon plein et son châssis stabilisateur translucide

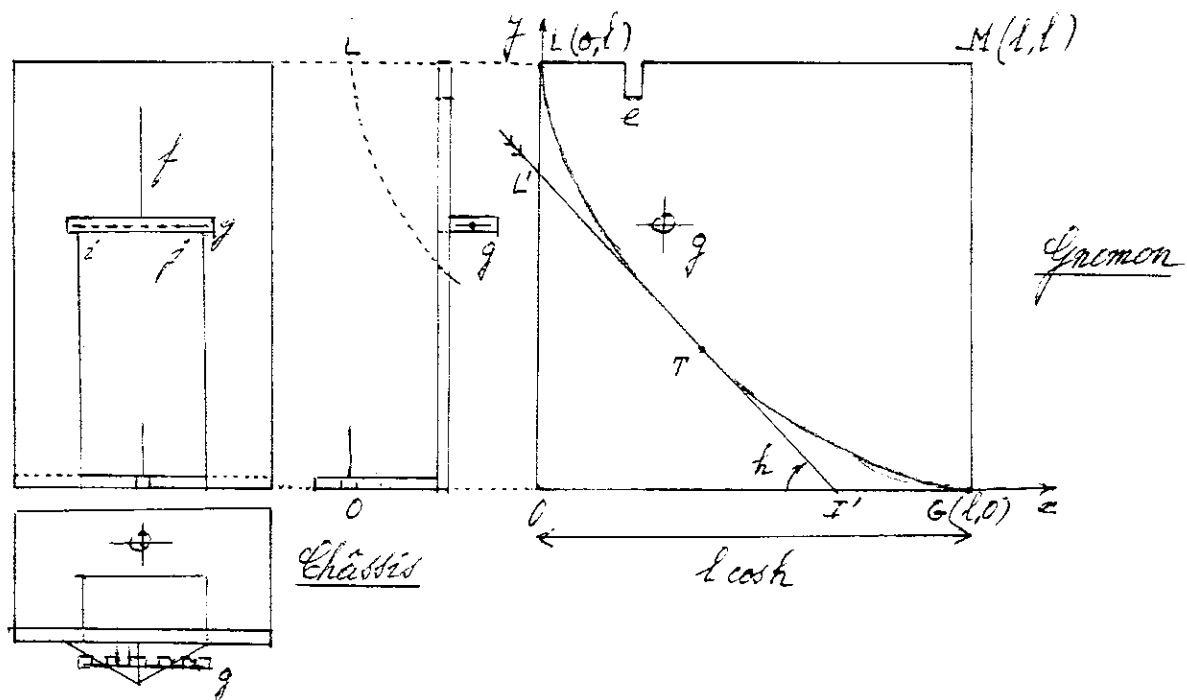


fig.8

Dans sa partie gauche, la fig 8 représente l'épure du châssis en plexiglas ( ou Perspex anglais) avec ses projections usuelles, frontale et horizontale, et une vue de bout de ce cadre transparent, selon les procédés de la géométrie descriptive. A droite est donnée la projection cotée du gnomon. A titre indicatif, son épaisseur pourrait être de l'ordre de 0,5 mm : la finesse de l'ombre en dépend. Quant à son format l×l, une longueur l = 13 cm, par exemple, donnerait une taille raisonnable, ni trop grande, ni trop petite.

Les lettres e et f désignent une encoche taillée dans la partie supérieure rectiligne du gnomon et une fente pratiquée dans le plan du châssis de soutien de telle sorte que les deux pièces, convenablement ajustées, s'y emboîtent exactement dans leurs plans perpendiculaires respectifs. Une petite broche métallique filetée, ou une goupille g formant clavette, enserrerait le gnomon entre deux tasseaux latéraux et le maintiendrait rigidement fixé au châssis.

Les dimensions du cadre importent peu, car il n'a qu'un rôle de tuteur, sauf cependant à le disposer de telle façon que le bord supérieur ij de l'ouverture ménagée dans la plaque de plexiglas passe au-dessus du bord courbe, afin qu'il ne gêne en aucun cas la formation de l'ombre propre du gnomon, qui est évidemment la seule à prendre en compte.

Naturellement, les composantes du châssis, encadrement de la fenêtre ouverte, tasseaux de serrage et semelle pivotante, doivent être solidement assemblées par collage.

On rappelle que cette semelle, excavée en forme de fer à cheval, peut glisser sur la table (m) du cadran en tournant autour d'un pivot vertical dressé sur cette table mobile au point O, à l'aplomb de la pointe supérieure L du gnomon, entraîné ainsi par son châssis stabilisateur, face au Soleil, dans son plan vertical.

(à suivre)

### Le Courrier du CLEA

Notre Collègue Michel Dufourg, qui anime le club d'Astronomie du lycée Poirier de Gissac à Sainte Anne (97180) en Guadeloupe nous écrit :

*Vous n'êtes pas sans savoir que la Guadeloupe sera la seule portion du territoire français où l'éclipse de Soleil du 26 février 1998 sera totale.*

*Nous, je parle là au nom de mes collègues du club d'astronomie du lycée Ste Anne - Guadeloupe, serions intéressés par une collaboration et nous pourrions par exemple recevoir un ou plusieurs collègues, enseignant(s) ou non, quelques élèves éventuellement, si ce groupe était capable en retour de nous apporter quelque chose. Et cela ne devrait pas être trop dur car nous sommes débutants. Alors, si dans votre équipe, ou parmi les lecteurs des Cahiers Clairaut, la destination Guadeloupe, éclipse solaire est susceptible d'intéresser des candidats, envoyez-nous un petit mot, soit à l'adresse ci-dessus, soit à l'adresse personnelle :*

**Michel Dufourg    Maison Frédéric Martial - Pliane Belle Place    97190 GOSIER**

Une offre aussi sympathique ne devrait pas rester sans réponse !