EN SUIVANT LA LUNE ...

1. En suivant le Soleil

Imaginons un monde où le plan de l'équateur serait le même que le plan de la trajectoire de la Terre autour du Soleil. Le Soleil resterait toute l'année dans le plan de l'équateur et chaque jour sa trajectoire apparente serait la même, celle du 21 mars et du 23 septembre, équinoxes. Il n'y aurait pas de saisons. Imaginons maintenant que la Terre fasse, de plus, un tour sur elle-même pendant qu'elle fait son tour annuel autour du Soleil. Nous verrions alors le Soleil fixe dans le ciel. On définirait l'année par la position des étoiles.

Imaginons maintenant que la Terre fasse un tour sur elle-même en un an mais que l'équateur soit comme dans la réalité incliné de 23°,5 sur le plan de son orbite autour du Soleil. Que verrions-nous ? De façon évidente, le Soleil ne serait plus fixe. Il monterait à 23°,5 au-dessus de l'équateur et descendrait au bout d'un demi-tour à 23°,5 au-dessous. Nous allons montrer qu'il décrirait une courbe en forme de 8. Si l'orbite de la Terre était un cercle, ce 8 serait bien symétrique comme sur la figure 1.a ; mais l'orbite de la Terre est une ellipse, les deux boucles seraient de ce fait de tailles très différentes (figure 1.b).

Un Américain, Dennis di Cicco a réussi à photographier cette courbe du Soleil entre le 27 février 1978 et le 17 février 1979 (figure 1.c). Comment a-t-il fait, puisque la Terre ne tourne pas sur elle-même en un an ? Tous les jours à la même heure, au bout de 24 h exactement, nous retrouvons la position que la Terre aurait si elle faisait un tour sur elle-même en un an. En effet, au bout de 365,26 jours solaires, les constellations se retrouvent exactement dans la même position par rapport à la Terre. La Terre a fait 366,26 tours sur elle-même. La fréquence solaire apparente est égale à la fréquence de rotation de la Terre moins la fréquence de révolution de la Terre autour du Soleil ; on peut aussi le dire en termes de vitesse angulaire $\omega = 2\pi.$(fréquence) ou d'angles (ωt) :

N(Soleil) = N(rotation de la Terre) - N(révolution de la Terre)

$$\frac{1}{\text{jour solaire}} = \frac{1}{\text{jour sidéral}} - \frac{1}{\text{année}}$$

Dennis di Cicco a photographié le Soleil tous les 10 jours, exactement à la même heure, 8h30 (temps local USA-Est). Il a obtenu la photo 1.c où les dates sont figurées.

Cette courbe en forme de 8 était déjà connue dans certains types de cadrans solaires mais ne semblait jusqu'alors qu'une représentation

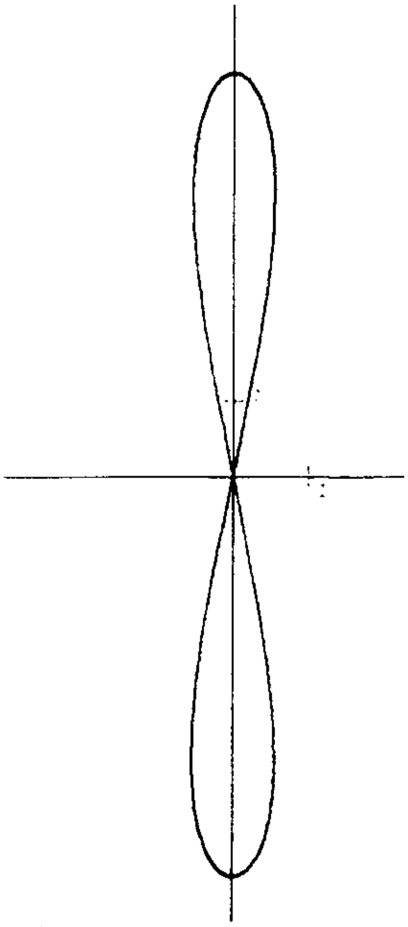


figure 1-a

Si l'orbite de la Terre était un cercle, l'analemme du Soleil serait symétrique.

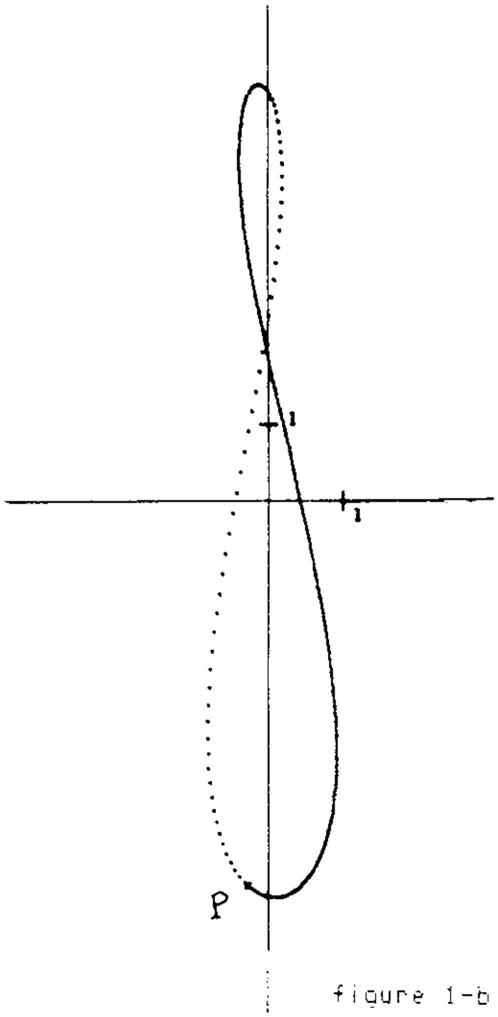


figure 1-b

Analemme tracé à l'ordinateur: en P, la Terre est au périhélie.

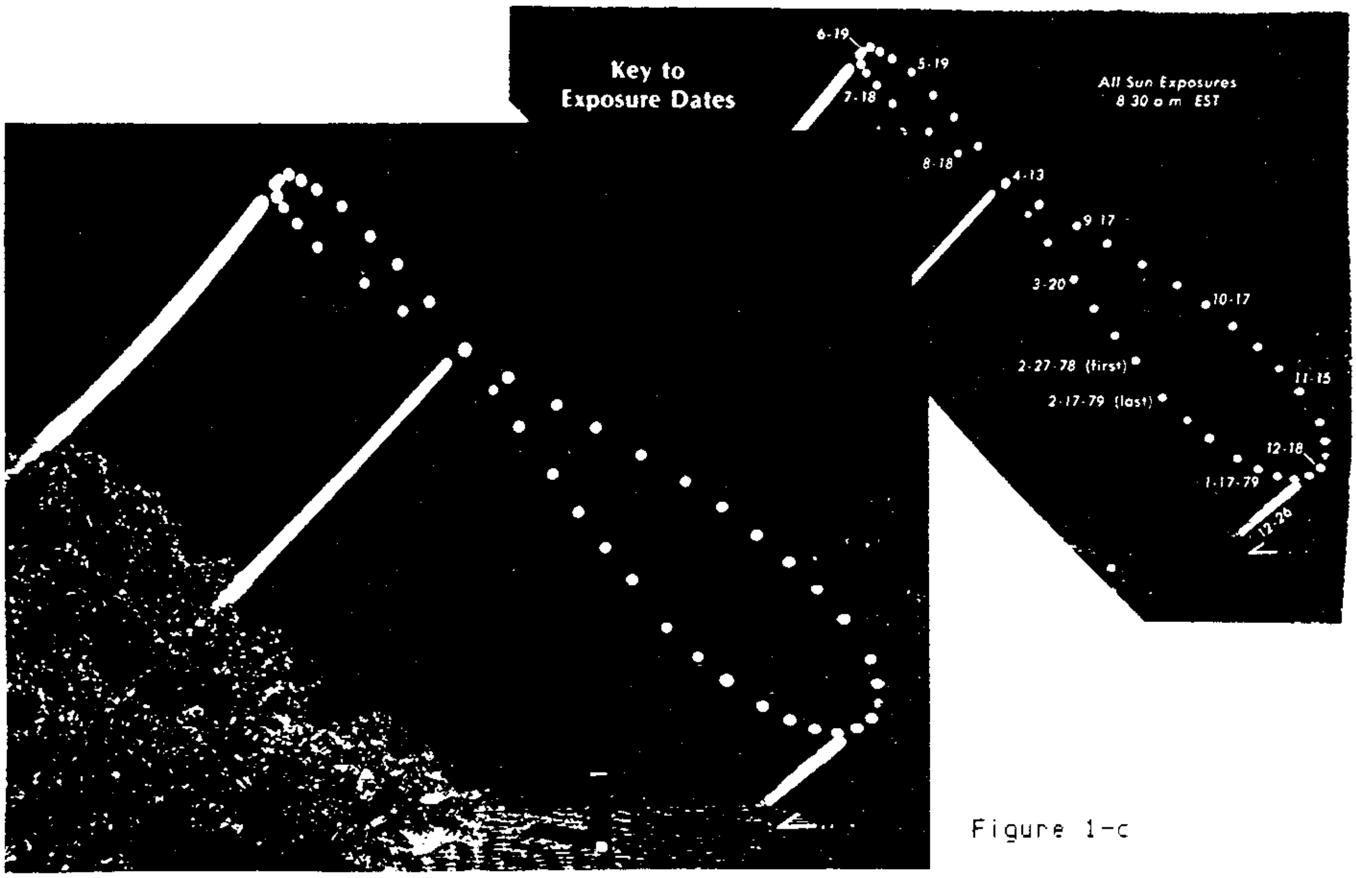


Figure 1-c

Analemme photographié en 1978-79 par Dennis di Cicco.

de l'équation du temps (différence entre le midi solaire vrai et le midi solaire moyen tout au long de l'année). Arriver à la même position sur la courbe, un an plus tard, prouve que le jour solaire vaut 24 h avec une précision meilleure que 0,2 seconde. Une erreur de 0,2 seconde par jour, deviendrait 365 fois plus grande après un an soit 72 secondes ; une erreur d'une minute serait visible entre le premier et le dernier soleil. Cette photo spectaculaire de l'analemme du Soleil serait "réellement" le mouvement apparent du Soleil si la Terre tournait sur elle même en un an au lieu de 23 heures 56 minutes.

2. Observer la Lune "un jour lunaire" moyen plus tard

Chaque jour, en tournant avec la Terre, nous dépassons aussi la Lune qui tourne autour de nous dans le même sens en 27,32 jours. Si la période de rotation de la Terre sur elle-même était de 27,32 jours, quel mouvement apparent observeriez-vous pour la Lune ? Vous verriez une sorte d'analemme car l'orbite de la Lune est inclinée sur l'équateur terrestre, L'angle d'inclinaison varie entre 18°,5 et 28°,5. Pour prendre en photo cet "analemme", le temps entre deux prises de vue doit être "un jour lunaire" moyen, environ 24h 50 min. Comme nous l'avons vu pour le Soleil, nous pouvons calculer la fréquence apparente, inverse du "jour lunaire" :N(Lune) = N(rotation de la Terre) - N(révolution de la Lune) soit $\frac{1}{\text{jour lunaire}} = \frac{1}{\text{jour sidéral}} - \frac{1}{\text{mois sidéral}}$

Figures 2.a, 2.b et 2.c

Figure 2.a : la Lune en mai 1987

Nous avons photographié la Lune chaque "jour lunaire" pendant qu'elle "descendait". A la déclinaison 0°, nous voyons l'axe polaire de la Terre (perpendiculaire à l'équateur) incliné vers la droite de l'écliptique comme le représentent les géographes. Le mouvement réel de la Lune a été obtenu en prenant chaque photo 4 minutes plus tôt que la veille soit un jour sidéral entre deux photos. C'est, à 5° près, le plan de l'écliptique. A la déclinaison 0°, la Lune a été photographiée toutes les deux minutes (pour donner l'échelle en temps 1/125s). Au minimum de déclinaison, nous avons effectué une pose de deux fois 5 minutes. La deuxième fois, un filtre polarisant a été ajouté. Le cercle de l'équateur est vu comme une droite car la Terre (donc l'observateur) se trouve dans le plan de ce grand cercle de la sphère céleste. Il en est de même pour l'écliptique.

Figure 2.b : la Lune en juin 1987

La Lune a été photographiée toutes les 24h 50min 15s pendant qu'elle "remontait" après le minimum de déclinaison à -28°,5. A 0°, nous remarquons que l'axe polaire de la Terre est incliné sur la "gauche" de l'écliptique. Quand la Lune a fait un demi-tour et se retrouve à nouveau à la déclinaison 0°, son orbite recoupe le plan de l'équateur, on regarde de "l'autre côté" du plan de l'écliptique. A la déclinaison -28°, une photo en pose de la Lune donne une trainée coupée en deux par le passage d'un nuage. Le Soleil a été pris le 12 juin à la déclinaison +23°, toutes les 20 minutes (1/2000 ème de seconde, filtre de densité neutre 0,95).

<u>Figure 2.c : la Lune en septembre 1987</u>

La Lune a été photographiée toutes les 24h 50min 24s, pendant qu'elle "montait" puis commençait à "redescendre". A la déclinaison 0°,5, des photos toutes les deux minutes indiquent l'équateur. Cette nuit-là, le brouillard a rendu les photos floues. Sur la petite boucle, quatre photos manquent à cause du brouillard. Trois photos de Jupiter (l'une est juste au-dessus des reflets de l'image du Soleil dus au filtre) montrent que le plan de la photo tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe polaire avec une période d'environ 28 jours. L'échelle des temps est donnée par la distance entre les deux images du Soleil (à la déclinaison 1°,5 le 20 septembre) prises à 7h 58min (deuxième soleil, le premier n'est pas visible) et à 11h 28min (4 ème et dernier soleil). En trois jours, on peut considérer Jupiter comme un point fixe.

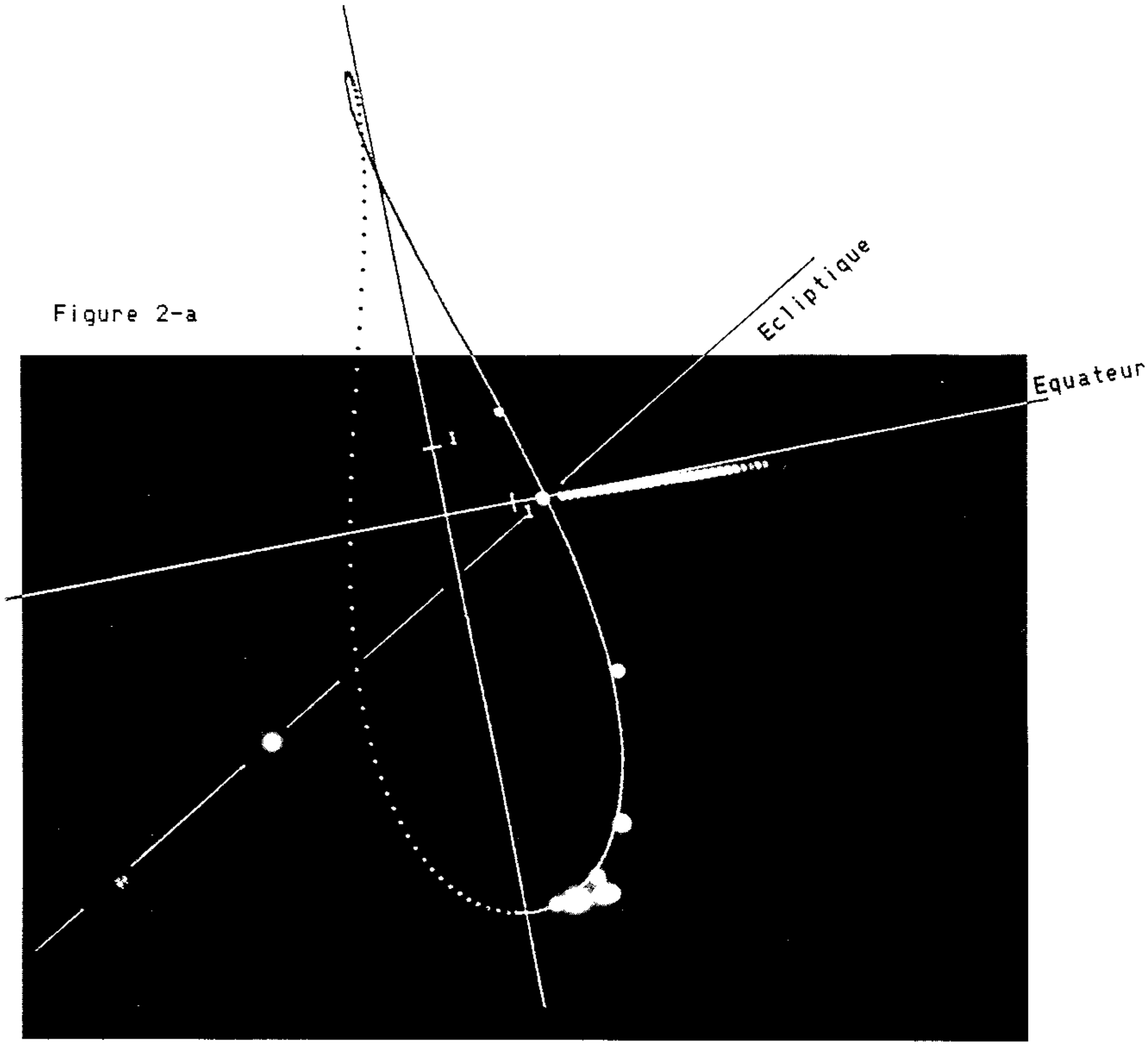


Figure 2-a

Figure 2-b

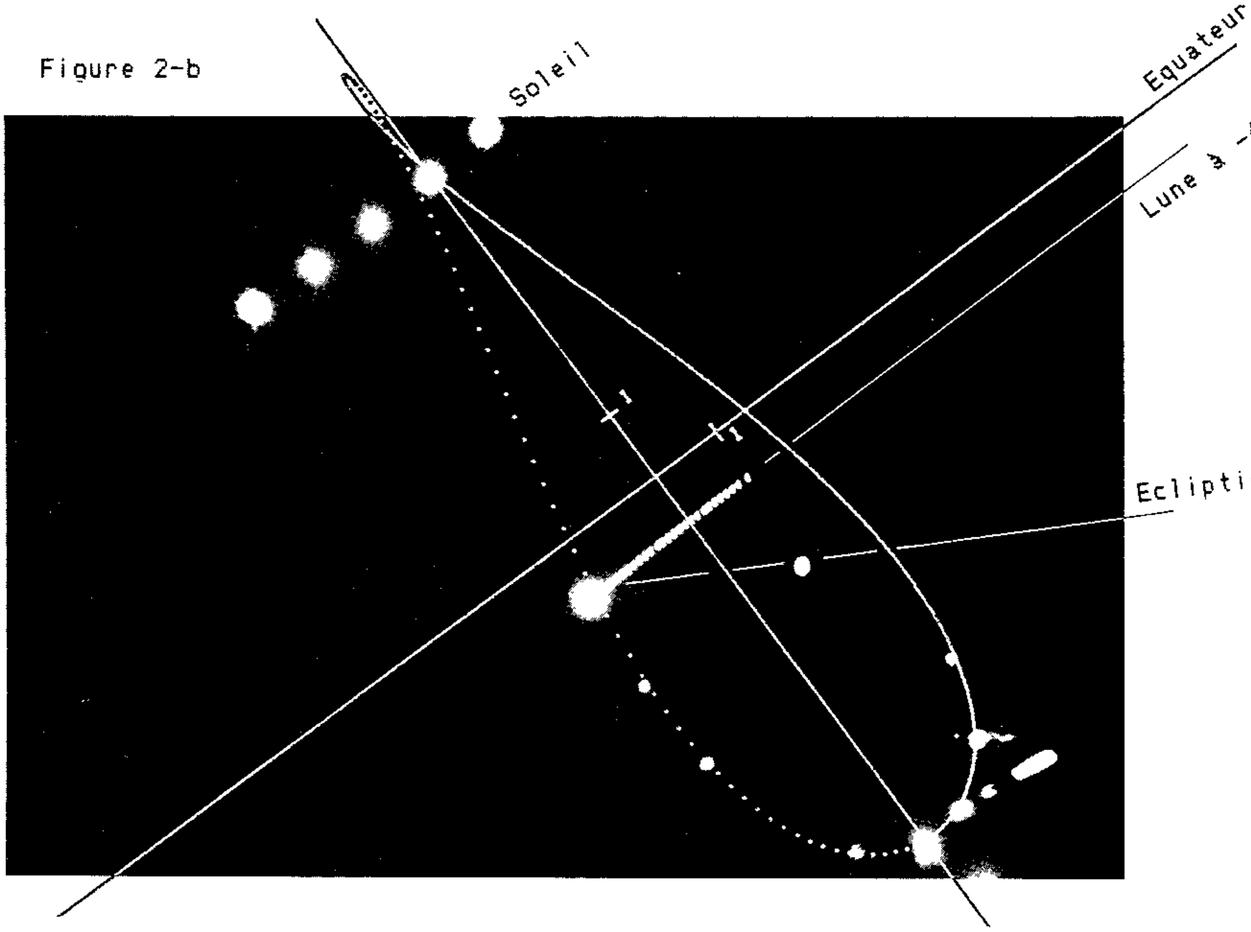
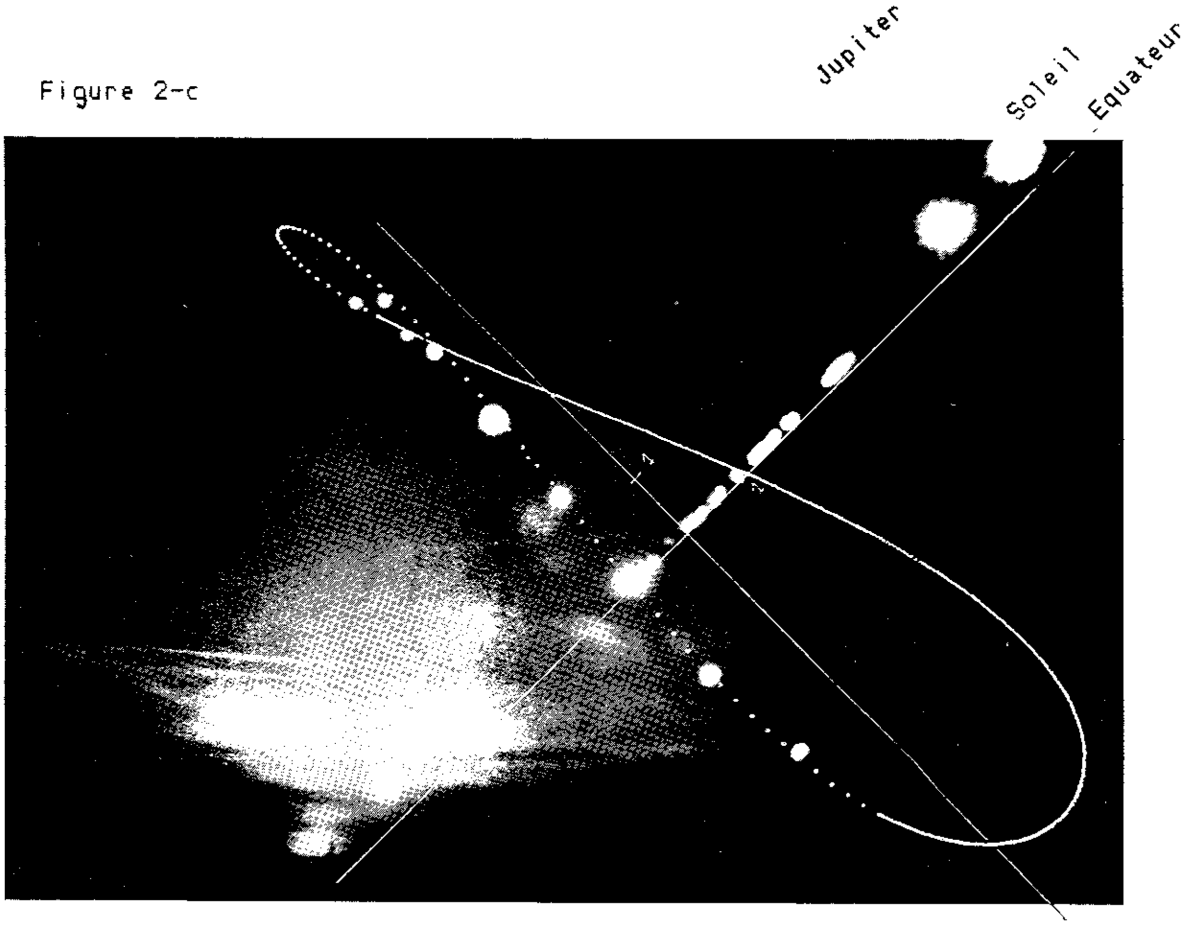


Figure 2-c



3. L'"analemme" d'un satellite

Considérons un satellite tournant d'ouest en est autour de la Terre. Supposons que son orbite soit un cercle incliné d'un angle i sur le plan de l'équateur. S'il est à environ 36 000 km de la Terre, sa période sera celle de la Terre, 23h 56min. Son mouvement apparent dessine un 8 et les deux boucles sont symétriques si l'orbite est un cercle (figures 3 et 4). Lorsque le satellite est en M ou M' (près du maximum ou du minimum de déclinaison (fig 3 et 4a), nous pouvons montrer que la vitesse apparente est vers l'est. R est le rayon de l'orbite, $\Omega(sat)=V(sat)/R$ est la vitesse angulaire du satellite dans son plan ; i est l'angle entre le plan de l'orbite et le plan de l'équateur. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ tournant à la vitesse angulaire Ω (sat)(qui est ici la vitesse réelle de rotation de la Terre) autour de l'axe polaire D, la vitesse apparente vers l'est vaut : $\overrightarrow{v(sat)} - \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(M)}$ (fig 4.a)

M est à la distance $d = R \cos i$ de l'axe polaire donc $V_{\mathcal{R}}(M) = d.V(sat)/R$

Plus i est grand, plus la vitesse apparente vers l'est est grande.

$$(1 - d/R)\ V(sat) = (1 - \cos i)\ V(sat)$$

Entre M et M', la composante de la vitesse vers l'est diminue et la distance d augmente. En P et P', (fig 3 et 4.b), d=R. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le mouvement apparent est vers l'ouest. Nous voyons sur la figure 4.b que i/2 est l'angle entre la vitesse apparente en P et l'axe polaire. Donc on retrouvera l'angle i entre les vecteurs vitesses à la déclinaison 0°.

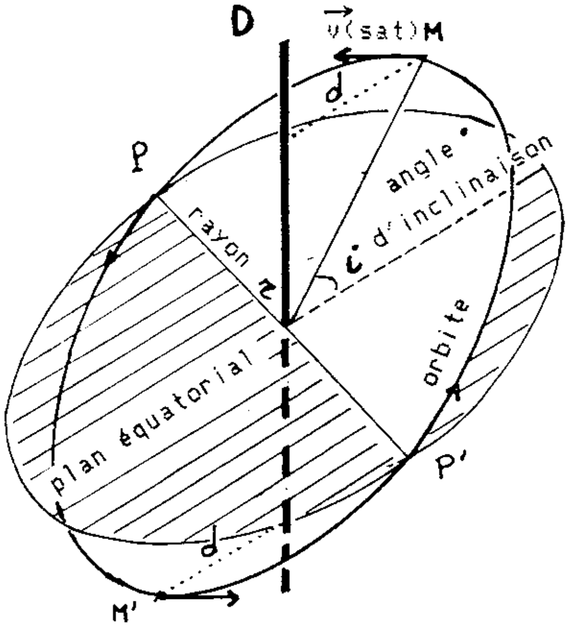
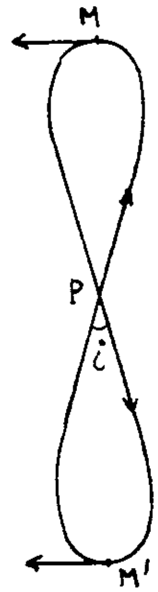


figure 3



Mouvement apparent lorsque le mouvement réel est un cercle incliné de i sur l'équateur.

figure 4-a

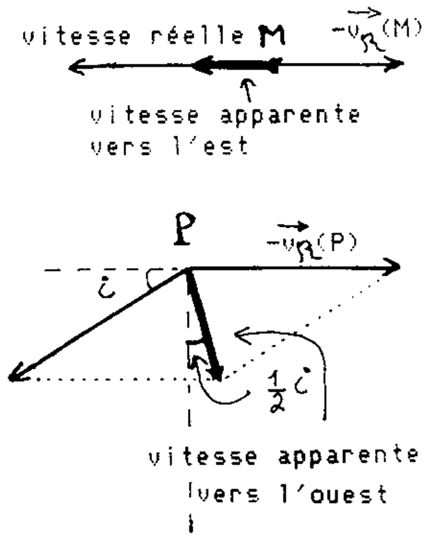


figure 4-b

4. "L'analemme" de la Lune

L'orbite de la Lune est une ellipse, la Terre étant l'un des foyers. Nous supposons que le grand axe de l'ellipse est confondu avec la droite de plus grande pente par rapport à l'équateur (la déclinaison est minimum pour le périgée). Pour une ellipse, le mouvement suit la loi des aires (deuxième loi de Kepler). La vitesse est plus grande au périgée que la vitesse moyenne donc la boucle devient plus grande. L'autre boucle devient plus petite car la vitesse de la Lune à l'apogée est plus petite que la vitesse moyenne. A la déclinaison 0° nous trouvons encore l'angle d'inclinaison i entre les tangentes à la courbe parce que à mi-chemin entre le périgée et l'apogée la vitesse est pratiquement égale à la vitesse moyenne si $e \ll 1$. En avril 1987, le périgée était presque au minimum de déclinaison, la courbe était symétrique (figure 5.a). L'inclinaison i joue un rôle important dans la forme de la courbe : l'effet d'excentricité est d'autant plus grand que l'inclinaison est faible. Figure 5, nous comparons pour une même excentricité, la Lune vue de la Terre ($i=28°,5$) à la Terre vue de la Lune ($i=7°$).

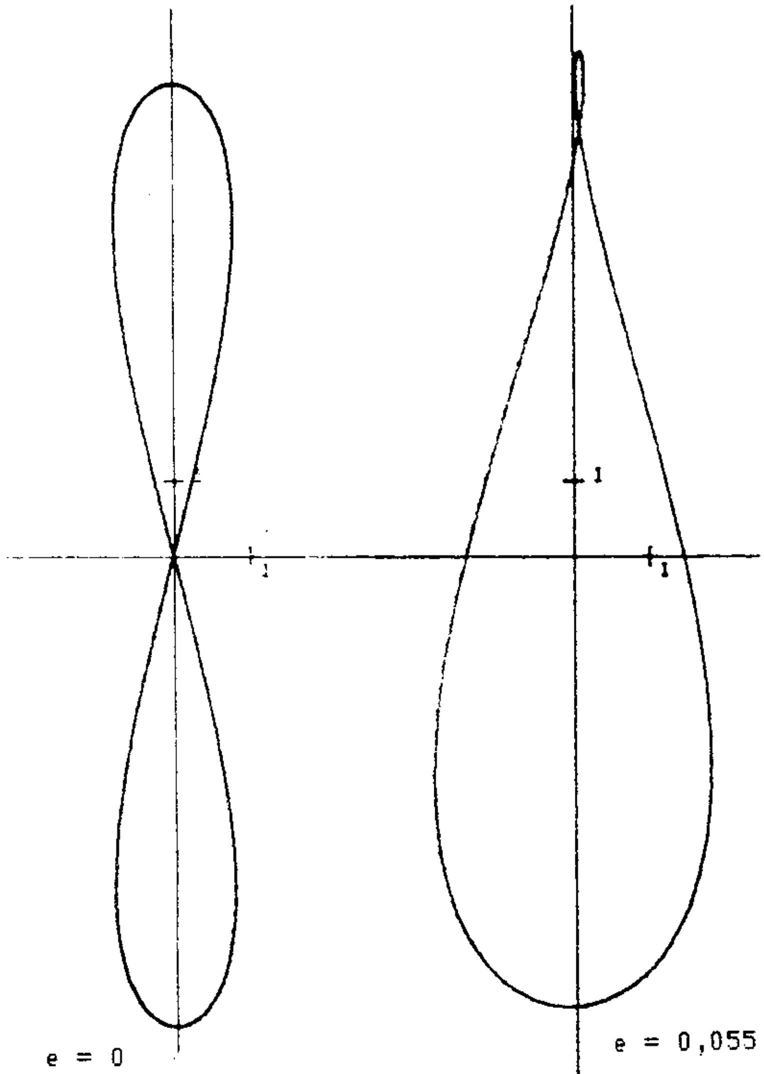


figure 5-a

Mouvement apparent de la Lune vu de la Terre, si la Terre faisait un tour sur elle-même en 27,32 jours.
A gauche: si l'orbite était un cercle
A droite: en avril 1987

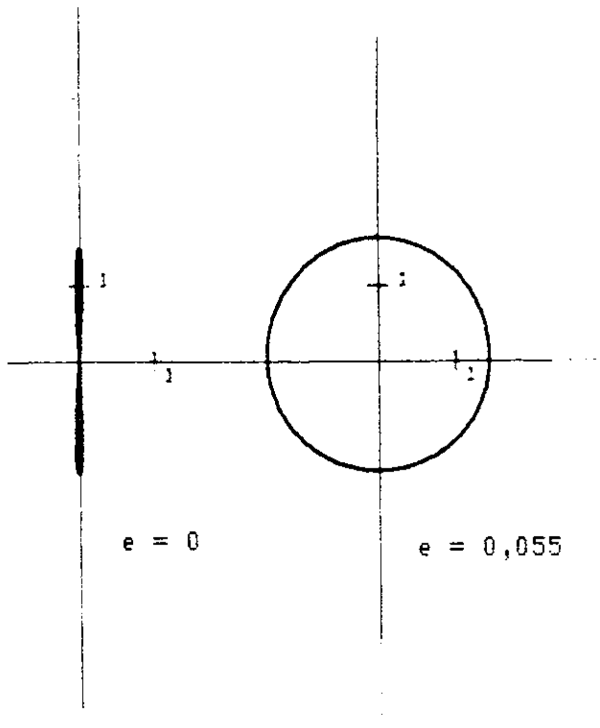


figure 5-b

Mouvement apparent de la Terre vu de la Lune.
A gauche, en septembre 88.
A droite, en 1987

5. Quelle est l'évolution de la courbe lorsque le plan de l'orbite de la Lune tourne et lorsque le périgée tourne dans le plan de l'obite ?

Lorsque le plan de l'orbite tourne avec une période de 18,6 ans (rétrogradation des noeuds lunaires qui sont les intersections de l'orbite avec le plan de l'écliptique), la déclinaison extrémale de la Lune varie entre 18°,5 et 28°,5 (l'angle i). En 1987 la déclinaison extrémale est voisine de 28°,5, la petite boucle est visible. En janvier 1983 la déclinaison était 23°,6 et la petite boucle était trop petite pour être visible.

Lorsque le périgée tourne dans le plan de l'orbite, la courbe en forme de 8 perd de la symétrie et les dimensions relatives des deux boucles changent. En 1987 le périgée est voisin de la déclinaison minimale comme c'est le cas pour le Soleil. La petite boucle est en haut. Lorsque le grand axe de l'ellipse est dans le plan équatorial, l'excentricité de l'ellipse n'est plus visible. Les deux boucles ont la même taille comme pour l'orbite circulaire. NOus montrons l'évolution de la courbe entre janvier 83 et décembre 88. Le logiciel utilisé a été réalisé par Paul Moutte (lycée Jean-Perrin, Marseille) et permet de tracer rapidement n'importe

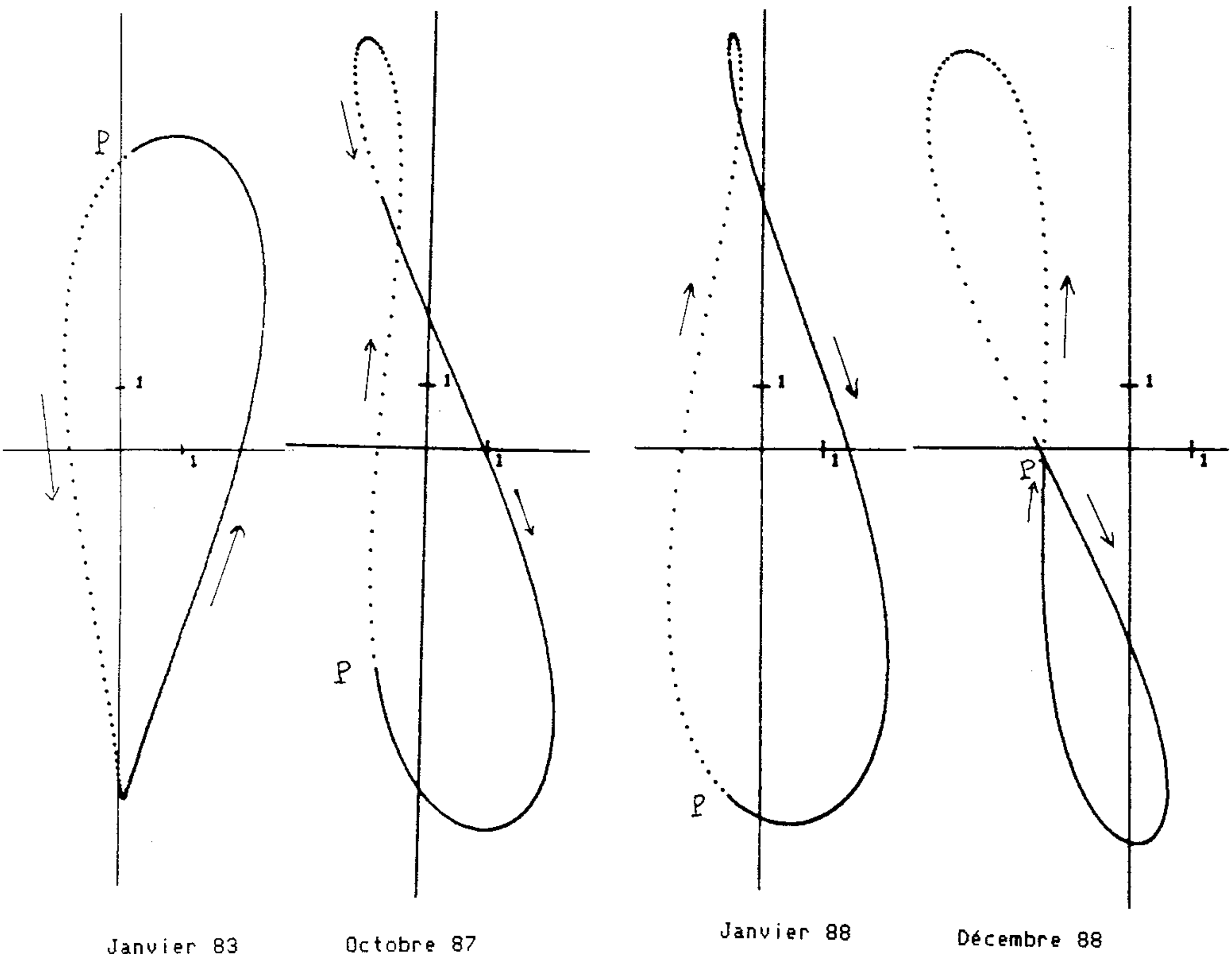


Figure 6: "Analemmes" de la Lune, si la Lune était notre Soleil. En P, la Lune est au périgée.

quelle courbe. Les équations sont expliquées en annexe (fig 6).

6. Quand on est sur la Lune, la courbe en forme de 8 devient le mouvement apparent "réel" de la Terre (figure 5.b)

La Lune tourne sur elle-même en 27,32 jours. Ainsi sa vitesse angulaire est la vitesse moyenne apparente de la Terre et le mouvement apparent de la Terre est une petite courbe en forme de 8. L'orbite est inclinée de 6°,7 sur le plan de l'équateur de la Lune donc la hauteur de la courbe ne sera que de 13°,4. La petite boucle n'est plus visible dès que le périgée s'éloigne du plan de l'équateur de la Lune. L'effet d'excentricité est très important.

Lorsque le périgée est dans le plan de l'équateur, l'effet d'excentricité n'est pas visible. Les deux boucles sont symétriques.

Il y a d'autres satellites de planètes ayant même période de rotation et de révolution.

7. Relation entre l'excentricité de l'orbite et les deux boucles

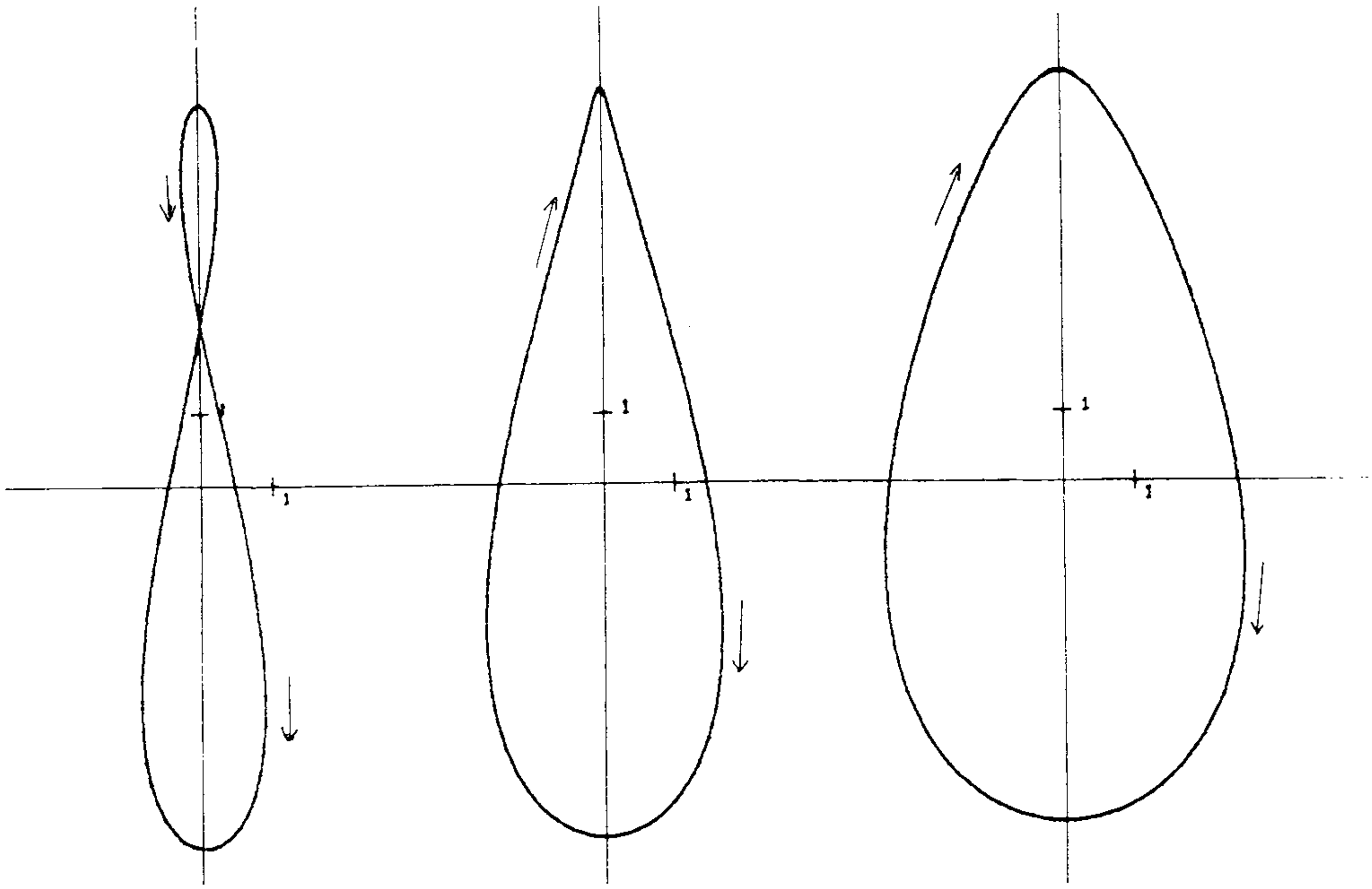
L'évolution de "l'analemme" de la Lune montre que l'excentricité de l'orbite est reliée aux dimensions relatives des deux boucles pour un même angle i. Le sens du mouvement sur les deux boucles est opposé. Donc la différence entre l'aire de la grande boucle et celle de la petite boucle est l'aire algébrique de la courbe. Si l'orbite est un cercle, cette aire algébrique est nulle. Lorsque l'orbite est une ellipse, cette aire algébrique est proportionnelle à e, si e est petit devant i (figure7). Nous comparons l'excentricité des orbites de la Terre, de la Lune et de Mars. Nous comparons l'aire algébrique S des courbes pour i=23°,5. Nous supposons le périgée au minimum de déclinaison pour les trois valeurs de e : e(Terre)=0,017 e(Lune)=0,055 e(Mars)=0,093 Nous trouvons sur la figure 7 : S(Terre)=7,17 cm^2; S(Lune)=22,90 ; S(Mars)=39,30 D'où S/e = $4,2 \times 10^2$ dans les trois cas, valeur qui dépend évidemment de l'échelle de la courbe.

Soient r et θ les coordonnées polaires, T la période et a le rayon du cercle ou le demi grand axe de l'ellipse. La propriété vient du fait que, pour un cercle l'aire élémentaire est $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \pi \frac{a^2}{T}$ tandis que pour une ellipse cette aire est $\frac{\pi a^2}{T}(1-e)$

Nous pouvons aussi tracer l'analemme du Soleil vu de Mars et comparer les équations du temps sur la Terre et sur Mars.

Annexe : Ecriture des équations de l'analemme

paramétrons l'ellipse dans le plan de la trajectoire (figure 10). Définissons le paramètre u. O est le centre de l'ellipse, A_1 le foyer Terre. Nous traçons le cercle de centre O et de rayon a, a est le demi-grand axe de l'ellipse. Nous supposons qu'à l'intant t=0 la Lune est en P_1 le périgée (angle polaire θ=0). A l'instant t la Lune est au point S. Les coordonnées polaires sont r=OS et l'angle $\theta=(P_1 A_1 S)$. De S nous traçons la perpendiculaire à OA ; elle coupe la circon-



Terre: e = 0,017 Lune: e = 0,055 Mars: e = 0,093

Figure 7: Comparaison de l'excentricité des trois orbites en prenant la même valeur i = 23,5°. La surface algébrique de la courbe est proportionnelle à e.

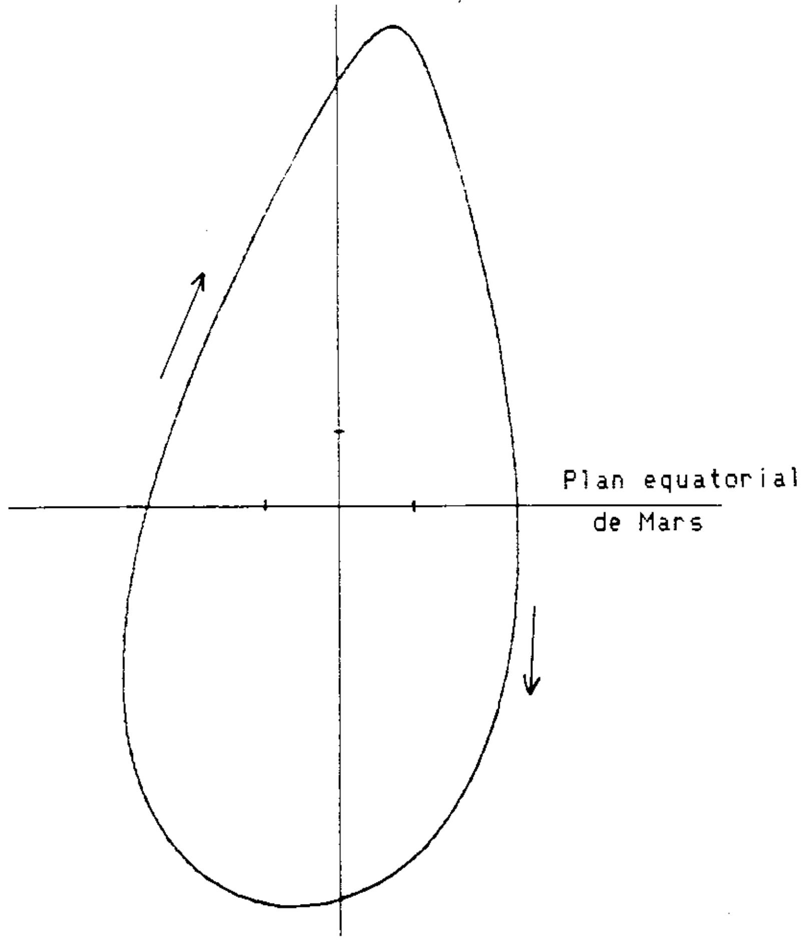


Figure 8: Analemme du Soleil, vu de Mars: e = 0,093 , i = 25,2° , l'angle entre le périhélie et le minimum de déclinaison est −15,8°
Sur Mars, le périhélie est un mois avant le minimum de déclinaison.

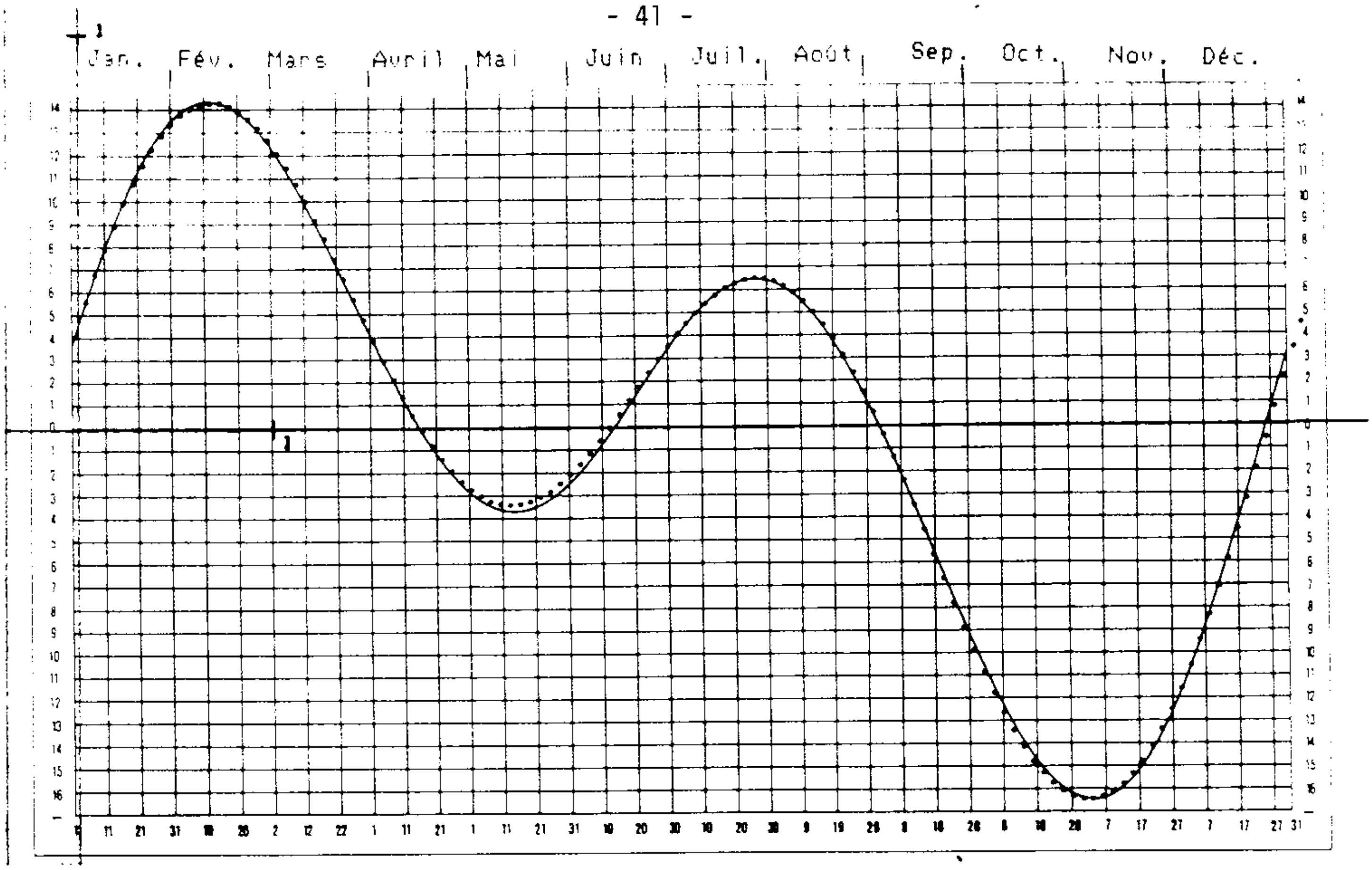


Figure 9-a Equation du temps tracée à l'ordinateur comparée à la courbe donnée par le Bureau des Longitudes. Temps solaire moyen moins temps solaire vrai.

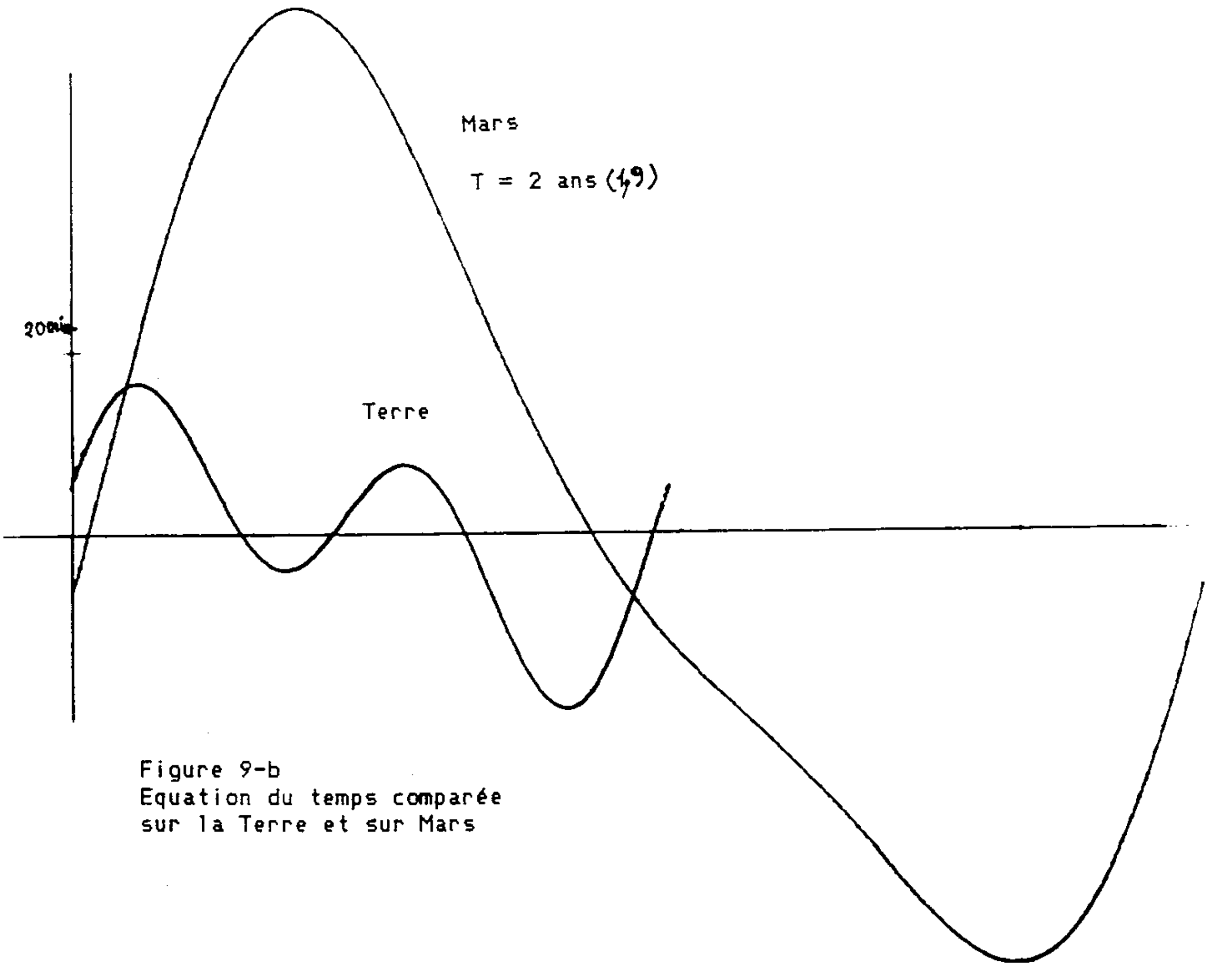


Figure 9-b
Equation du temps comparée
sur la Terre et sur Mars

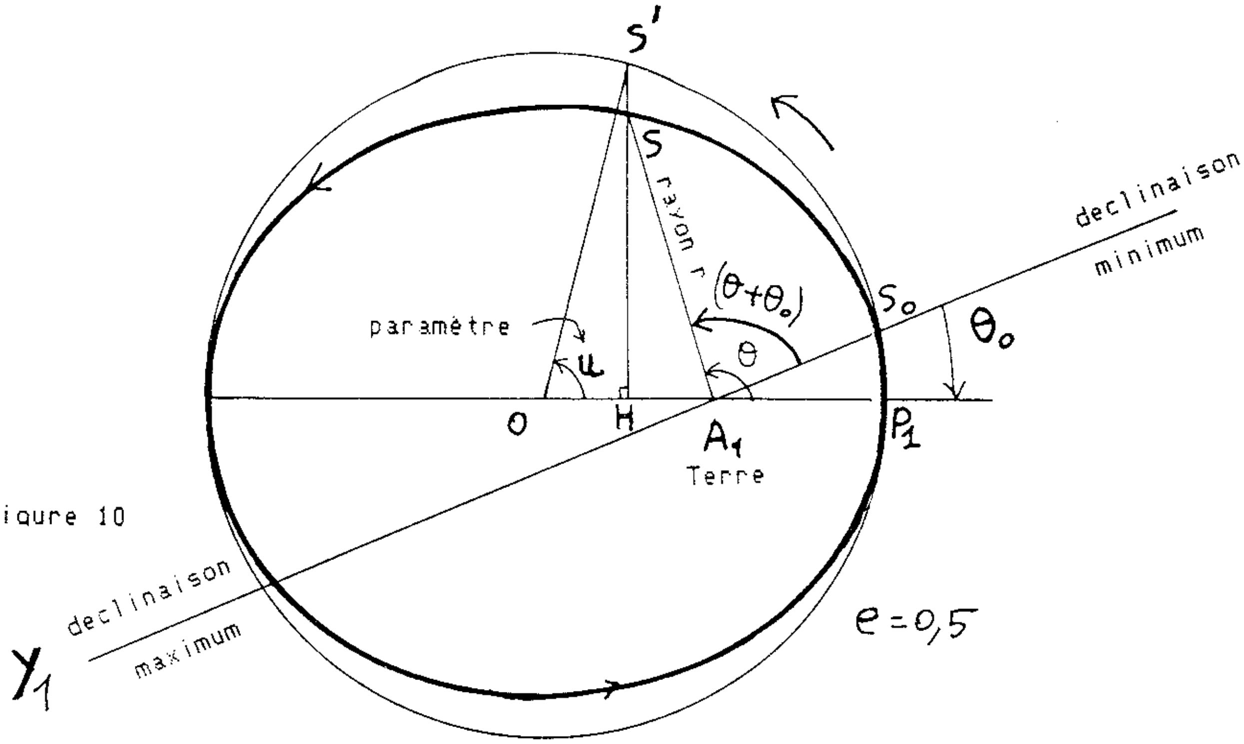


figure 10

La Lune décrit une ellipse d'eccentricité $e = 0{,}055$. La Terre est l'un des foyers. Sur la figure $e = 0{,}5$.

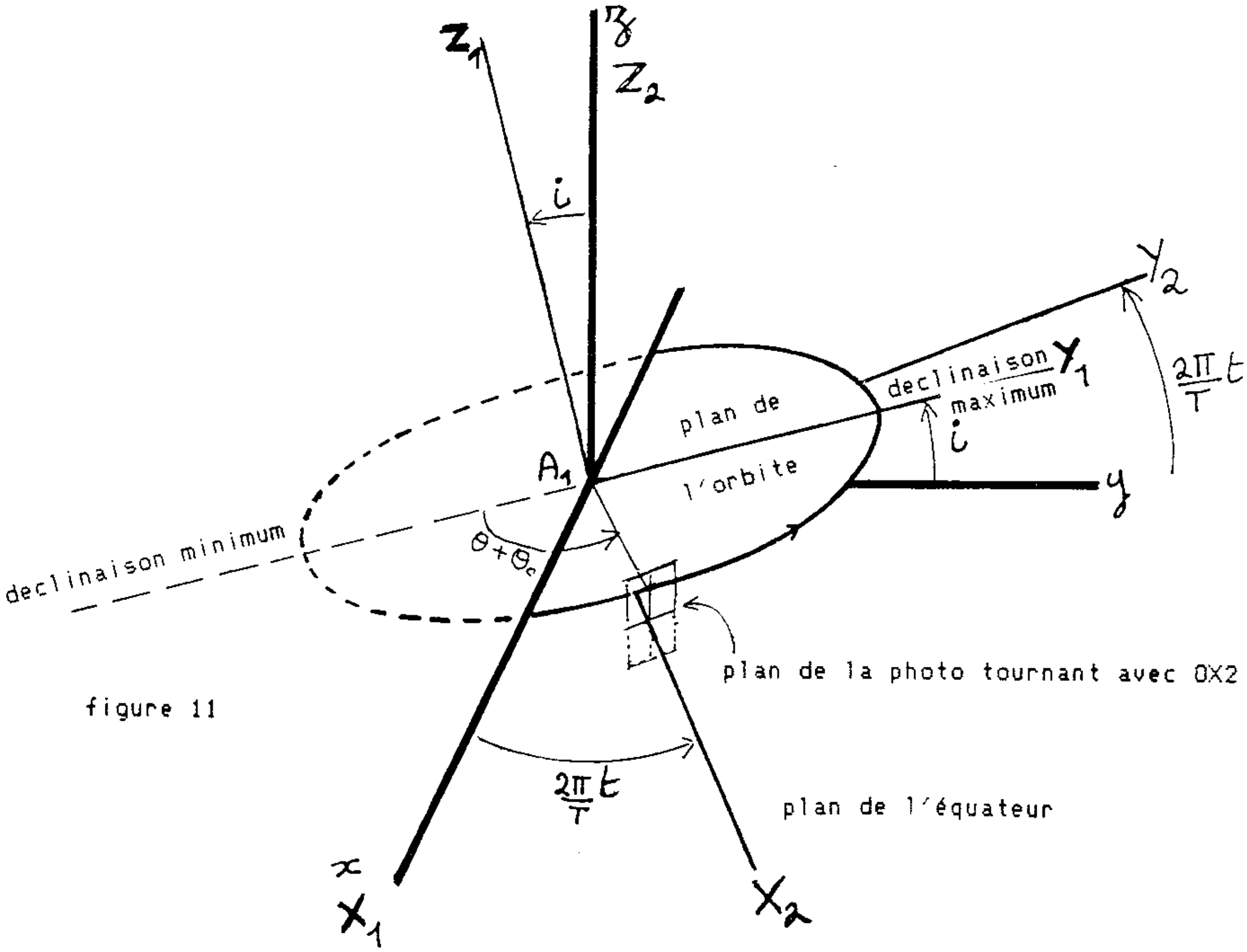


figure 11

Axes A1,X1,Y1, Z1 définis par le plan de l'orbite. Axes A1,x,y,z définis par le plan de l'équateur terrestre. Axes A1,X2,Y2,Z2 tournant autour de l'axe polaire avec la même période que la Lune.

férence en S'. L'angle $u = (A_1 OS')$ est le paramètre qui varie de 0 à 2π. Nous supposons que la déclinaison de la Lune est minimum en S_0 ; θ_0 est l'angle $(S_0 A_1 P_1)$ entre le minimum de déclinaison et le périgée. (t_0) est le temps mis par la Lune pour aller de S_0 à P_1 (négatif sur la figure). e est l'excentricité de l'ellipse :

$r = a(1 - e\cos u)$; $2\pi t/T = u - e \sin u$; $\cos\theta = a(\cos u - e)/r$

A_1X_1, A_1Y_1 sont dans le plan de l'orbite et A_1Z_1 est perpendiculaire à ce plan.

$X_1 = r \sin(\theta + \theta_0)$ $\qquad$ $Y_1 = -r \cos(\theta + \theta_0)$

Figure 11. On tourne d'un angle (-i) autour de A_1X_1 pour écrire les équations dans le système d'axes (A_1,x,y,z). Les axes A_1x et A_1y sont dans le plan équatorial et A_1z est l'axe polaire de la Terre. Ensuite on tourne d'un angle $2\pi(t+t_0)/T$ autour de l'axe polaire pour être dans le référentiel (A_1,X_2,Y_2,Z_2) qui suit la Lune. L'observateur regarde dans la direction A_1X_2 donc l'axe A_1Y_2 est à sa gauche. Les équations de la photographie sont dans le plan perpendiculaire à A_1X_2 c'est à dire $(A_1Y_2A_1Z_2)$. Nous obtenons :

$$Y_2 = -r \cos \frac{2\pi}{T}(t+t_0) \sin(\theta+\theta_0) + r \cos i \sin \frac{2\pi}{T}(t-t_0) \cos(\theta+\theta_0)$$

$$Z_2 = -r \sin i \cos(\theta+\theta_0)$$

L'axe A_1Y_2 est dans le plan de l'équateur donc peut être photographié quand la déclinaison est 0°.

Pour le Soleil, la courbe $(-Y_2) = f(t)$ représente l'équation du temps.

Matrices rotation pour les changements d'axes :

rotation (-i) autour de A_1x $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$

rotation d'un angle $\varphi = 2\pi(t+t_0)/T$ autour de A_1z

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Irène Tiraspolsky

Valeurs de i, θ_0, t_0/T données par les Ephémérides

	i	$\theta_0/2$	t_0/T
Soleil e = 0,017	23°,45"	0,037	0,037
Lune e = 0,055			
janvier 83	23°6"	0,55	0,56
avril 87	28°,6	-0,0085	-0,0085
juin 87	28°,4	0,016	0,016
septembre 87	28°,7	0,15	0,15
janvier 88	28°,4	0,06	0,06
décembre 88	28°,1	0,24	0,23
Mars e = 0,093	25°	0,044	0,044