ASTRONOMIE, MATHEMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

III - EQUATION DU TEMPS

Le Soleil ne repasse pas régulièrement toutes les 24 heures au méridien d'un lieu. En effet, les jours solaires vrais sont plus ou moins longs et il se produit un décalage Δ entre un soleil fictif S' qui repasserait, lui, très régulièrement toutes les 24 heures au méridien du lieu, et le soleil vrai S.

Si S' passe au méridien à l'instant tS' et S à l'instant tS on pose $\Delta = tS - tS'$.

Cette différence Δ entre tS et tS' a deux causes que nous examinerons séparément. L'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique donne ΔR et la non uniformité du mouvement de la Terre sur son orbite donne ΔC :

$$\Delta = \Delta R + \Delta C$$

Δ, ΔR et ΔC sont appelés respectivement équation du temps, réduction à l'équateur, et équation du centre.

Nous voulons étudier les variation de Δ sur une année autrement dit construire la courbe de l'équation du temps.

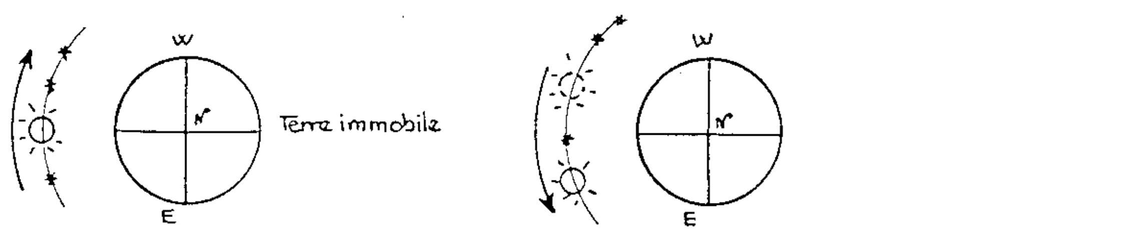
1 - Quelques préliminaires

En supposant l'écliptique confondu avec l'équateur et le mouvement uniforme, si T2 est la période de la rotation de la Terre sur son axe, T1 la période de sa révolution sur son orbite et T la période synodique on a :

$$\frac{1}{T2} = \frac{1}{T1} + \frac{1}{T}$$

Ainsi pour T = 24 heures et T1 = 365,25 jours on retrouve bien : T2 = 23 h 56 mn 04 s.

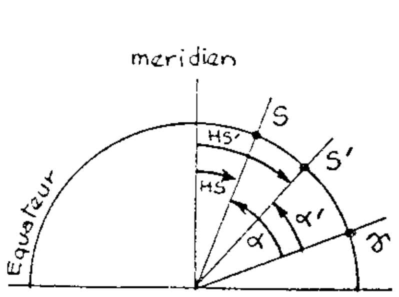
Remarque 1 : Les phénomènes observés sont les mêmes si on considère la Terre immobile et la sphère céleste mobile, tournant d'Est en Ouest avec la période T2 entrainant avec elle les étoiles et les astres. Le Soleil aura un déplacement relatif sur la sphère céleste d'Est en Ouest et de période T1.

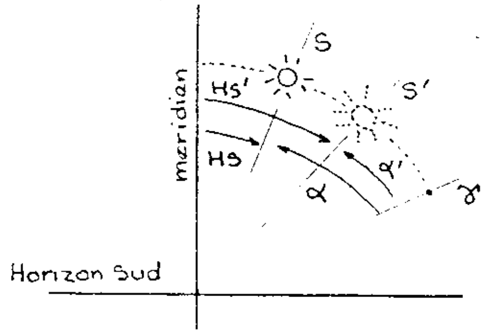


f.1 rotation de la sphère celeste — déplacement du Soleil sur la sphère céleste

Remarque 2 : Ascensions droites, passages au méridien et angles horaires. Notons HS et HS' les angles horaires de S et S', α et α' leurs ascensions droites tS et tS' leurs heures de passage au méridien. La figure ci-après montre bien que :

$\Delta = tS - tS' = HS' - HS = \alpha - \alpha'$

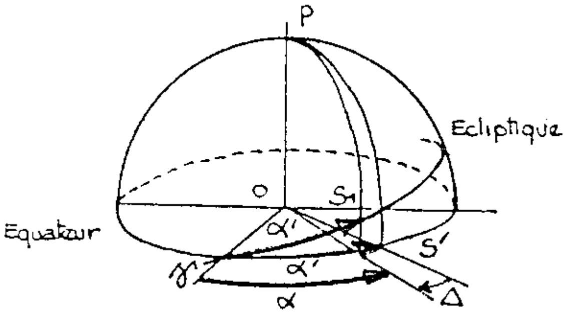


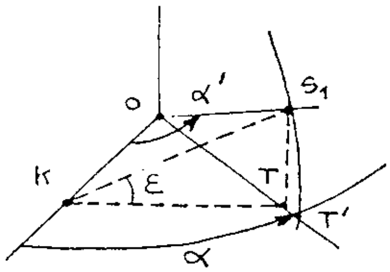


f.2

2 - Calcul de ΔR

On suppose ici que l'équateur est incliné sur l'écliptique de l'angle ε, mais que le mouvement du soleil vrai S_1 se fait uniformément sur l'écliptique. la figure ci-dessous montre bien que les variations de l'ascension droite α de S_1 ne sont pas uniformes. Soit S' un Soleil fictif se déplaçant sur l'équateur avec la même période que S ($\langle \vec{o\gamma}, \vec{oS_1} \rangle = \langle \vec{o\gamma}, \vec{oS'} \rangle$). On fait coïncider S_1 et S' au point γ On va calculer $\Delta R = \alpha - \alpha'$.





f.3

Qualitativement : S et S' se déplacent à la même vitesse, l'un sur l'équateur, l'autre sur l'écliptique. On s'intéresse aux ascensions droites ; S_1 et S' coïncident en γ . S_1 va commencer par prendre du "retard" (en "α" c'est-à-dire qu'il passera plus "tôt" au méridien et $\Delta R < 0$!...) puis il rattrapera ce retard pour le combler quand S_1 et S' auront fait chacun un quart de tour. Puis S_1 va prendre de l'"avance", et il la comblera pour coïncider avec S' en face du point γ etc...

Quantitativement : la figure ci-dessus montre que : $tg\,\alpha' = \dfrac{KS_1}{OK}$; $tg\,\alpha = \dfrac{KT}{OK}$

et $KT = KS_1 \cos\varepsilon$

d'où $$tg\,\alpha = tg\alpha' * \cos\varepsilon \qquad (\text{pour } \alpha' = k\frac{\pi}{2}\ , \quad \alpha = \alpha')$$

Si n est le nombre de jours écoulés depuis le dernier équinoxe de printemps on a

$\alpha' = \dfrac{2\pi}{T} * n = \dfrac{2\,\pi}{365{,}25} * n$. On a l'habitude de noter $\alpha' = M$, et cette valeur

est appelée l'anomalie moyenne du Soleil.

Algorithme de calcul de la réduction à l'équateur ΔR :

n est le nombre de jours écoulés depuis le dernier équinoxe de printemps et ΔR est en minutes décimales

Début

```
    ε ← 23.5 ;
    lire n ;
    M ← n * 2 * π /365.25 ;

    Si M = π/2 ou M = 3 * π /2 alors α ← M ;
                                sinon α ←  Arc tg (tgM * cosε ) ;
                                      si π/2 < M < 3π /2   alors α ← α + π ;
                                      si M > 3π/2          alors α ← α + 2π ;
    fsi

    ΔR ← α - M ;

    ΔR ← ΔR * 24/(2 * π ) * 60 ;

    Afficher  R ;
fin
```

3 - Calcul de ΔC

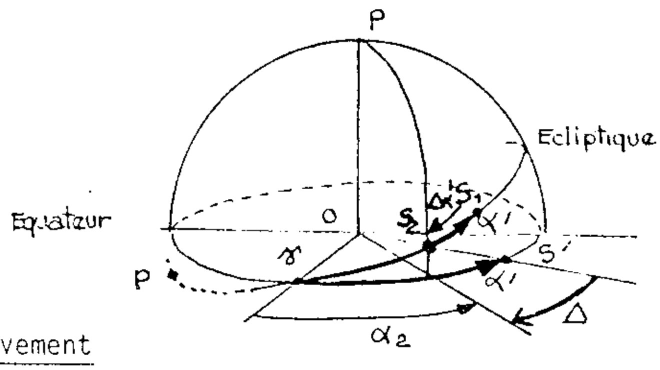
On tient compte maintenant des lois de Kepler pour le mouvement du Soleil sur l'écliptique.

Le Soleil S_1 des calculs précédents devient un Soleil fictif, le soleil réel est maintenant S_2 ; S_1 et S_2 se déplacent tous deux sur l'écliptique, l'un uniformément, l'autre non; d'où une différence angulaire $\Delta\alpha'$ entre les deux.
On fait coïncider S_1 , S_2 et S' en γ ;
α_2 est l'ascension droite de S_2 , α' celle de S'. La figure ci-dessous montre que :

$$\alpha_2 = \text{proj}\ (\alpha' + \Delta\alpha') = \text{proj}\ (\alpha') + \text{proj}\ (\Delta\alpha') \simeq \text{proj}\ (\alpha') + \Delta\alpha'$$

$$\Delta = \alpha_2 - \alpha' = \text{proj}(\alpha') + \Delta\alpha' - \alpha' = \text{proj}(\alpha') - \alpha + \Delta\alpha' = \Delta R + \Delta\alpha'$$

L'équation du centre est donc $\Delta C = \Delta\alpha' = v - M$ où M est l'anomalie moyenne et v l'anomalie vraie. (les figures 4 et 5 montrent que $\Delta\alpha' = \langle\vec{O\gamma},\vec{OS_2}\rangle - \langle\vec{O\gamma},\vec{OS_1}\rangle$ $= \langle\vec{OP},\vec{OS_2}\rangle - \langle\vec{OP},\vec{OS_1}\rangle$ = v - M ; on change seulement d'origine $\gamma \rightsquigarrow$ P = Périhélie)



f.4

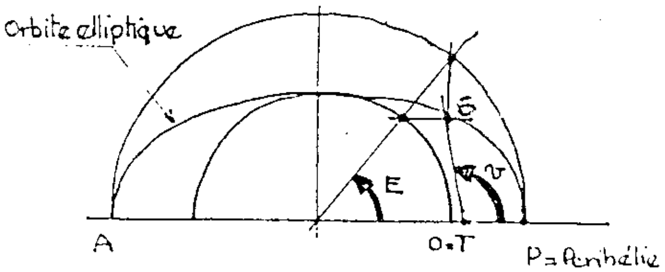
Qualitativement

On imagine équateur et écliptique confondus, S' est le Soleil fictif animé d'un mouvement uniforme sur un cercle, S_2 le Soleil réel qui décrit l'orbite elliptique. On les suppose confondus en P. Proche de la Terre le Soleil prend de l'avance puis il la rattrape pour la combler totalement en A, à l'aphélie ; S_2 et S' coïncident à nouveau. Puis S_2 continue de prendre du retard, enfin il le comble pour rattraper S' en **P**.

Quantitativement :

Remarque : Nous avons décidé de considérer la Terre immobile, c'est donc le Soleil qui décrit une ellipse Keplérienne ! Au lieu de considérer $O\gamma$ comme origine, on considère OP où P est le passage du Soleil au périhélie.
L'équation de Kepler (1) $E - e\sin E = M$ et la relation (2) $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}$ (pour $E = k\pi$ on a $v = E$)

vont nous permettre de calculer ΔC. La figure ci-dessous précise le sens de E (anomalie excentrique) et de v ; e est l'excentricité de l'ellipse.



f.5

Pour résoudre (1) c'est-à-dire calculer E connaissant M on utilise la méthode de Koenig :

Considérons la fonction f définie par $f(x) = e \sin x + M$. Comme $e < 1$, on a

$$|f(x) - f(x')| = e|x-x'| < |x-x'|$$

ce qui permet d'affirmer que la suite récurrente définie par $x_0 = M$ et $x_n = f(x_{n-1})$ est convergente et que sa limite est la solution de (1). Cela permet de calculer E avec la précision désirée.

Algorithme de calcul de l'équation du centre ΔC :

n est le nombre de jours écoulés depuis le dernier équinoxe de printemps ;
n_0 le nombre de jours séparant cette équinoxe du passage au périhélie.
ΔC est en minutes décimales

```
Début
   lire PREC ; lire n ;
   e ← 0,016 ; C ← √((1+e)/(1-e))
   n₀ ← 77,5 ;
   M ← (n + n₀) * 2 * π/365,25 ;
   E ← KEPLER (M,PREC)
   Si E = 0 ou E = π ou E = 2 *π
      alors v ← E
      sinon v ← 2 * Arctg (C * tg E/2)
            si E > π alors v ← v + 2 *π
   fsi
   ΔC ← v - M ;
   ΔC ← C * 24 / (2 *π) * 60 .
   Afficher ΔC
fin
```

```
KEPLER (M,PREC)

Début
   X ← M ; Y ← e * sin (X) + M
   Action à répéter
      Sortie : |Y - X| ≤ PREC
         X ← Y ;
         Y ← e * sin (X) + M
   Recommencer
   KEPLER ← X
fin
```

On retrouve bien ainsi la courbe de l'équation du temps donnée dans les éphémérides !

Jean Claude Allard