L'EQUATION DE KEPLER (suite)

5- Résolution de (EK).

Il existe beaucoup de méthodes pour résoudre l'équation de Kepler, car bon nombre de mathématiciens (les "géomètres" de Kepler) se sont penchés sur le problème. On en présente ici quelques unes.

La fonction $y=u-e.\sin u$ est toujours croissante, donc (EK) possède une racine unique. Cette équation s'écrit:

$$u - e.\sin u = M \qquad \text{(EK)}$$

et les angles sont mesurés en radians. Afin d'utiliser des angles en degrés, (c'est peut-être plus"parlant"), il faut la multiplier par $180/\pi$. Avec $e^\circ = e.180/\pi$, elle s'écrit:

$$\boxed{u - e^\circ.\sin u = M}$$

C'est sous cette dernière forme que nous l'utiliserons.

a). Méthode de Kepler

Kepler ne sait pas résoudre "son" équation puisqu'il appelle les "géomètres" à l'aide.

Il a cependant trouvé un moyen, pour le moins laborieux: il dresse une table numérique en se donnant des valeurs de u , et, avec e fixé, il calcule $u-e^\circ.\sin u$. Les tables trigonométriques existaient déjà, avec de nombreuses décimales, comme celle de Joachim Rheticus avec 15 chiffres pour des angles de 10" en 10" !

La lecture "inverse" de la table de Kepler lui fournit u pour M donné. Au besoin, il utilise l'interpolation linéaire.

Ce procédé est long car il faut une table par valeur de e, et e peut prendre bon nombre de valeurs entre 0,093 et 0,094 par exemple ...

u	u-0,093.sin u
88°,0	82°,674 738
88°,1	82°,774 422
88°,2	82°,874 122
88°,3	82°,973 838
88°,4	83°,073 570
88°,5	83°,173 318
88°,6	83°,273 083
...	...

Supposons que l'on cherche u tel que $M=83^\circ,100$ avec e=0,093. La table ci-contre permet de situer u entre 88°,4 et 88°,5

Une interpolation linéaire fournit:

$$u=88,4 + \frac{83,100-83,07357}{83,173318-83,07357} \times 0,1$$

$$=88,4 + 0,026\,496\,7$$

soit $u=88^\circ,426\,50$ à 10^{-5} degré près.

Une autre méthode (plus loin) donnera:

$$u=88^\circ,426\,498\,23$$

A la condition de disposer de très nombreuses tables, cette méthode donne de bons résultats.

b). Méthode graphique.

Considérons la sinusoïde (S) d'équation $y_1 = 180/\pi \cdot \sin u$ et la droite (D) d'équation $y_2 = \frac{u - M}{e}$ (cf fig.5). L'intersection de (S) et (D) fournit la valeur de u cherchée.

On peut facilement s'assurer que (D) passe par le point A de coordonnées ($M°$, $0°$) et par B ($M+100°.e$, $100°$), ou bien qu'elle est parallèle à celle passant par l'origine O et le point C de coordonnées ($100°.e$, $100°$).

Soit par exemple e=0,5 et M=60°

On lit directement u= 89° sur le graphique (à 1° près). Une autre méthode donnera dans ce cas u= 88°,639 817 ...

Si on se contente de 1° de précision, cette méthode est assez rapide, sauf si $M < 10°$ avec e voisin de 1 . Ceci correspond aux cas des comètes au voisinnage de leur périhélie. Mais hélas, les comètes ne sont visibles de la Terre que quand ces conditions sont remplies.

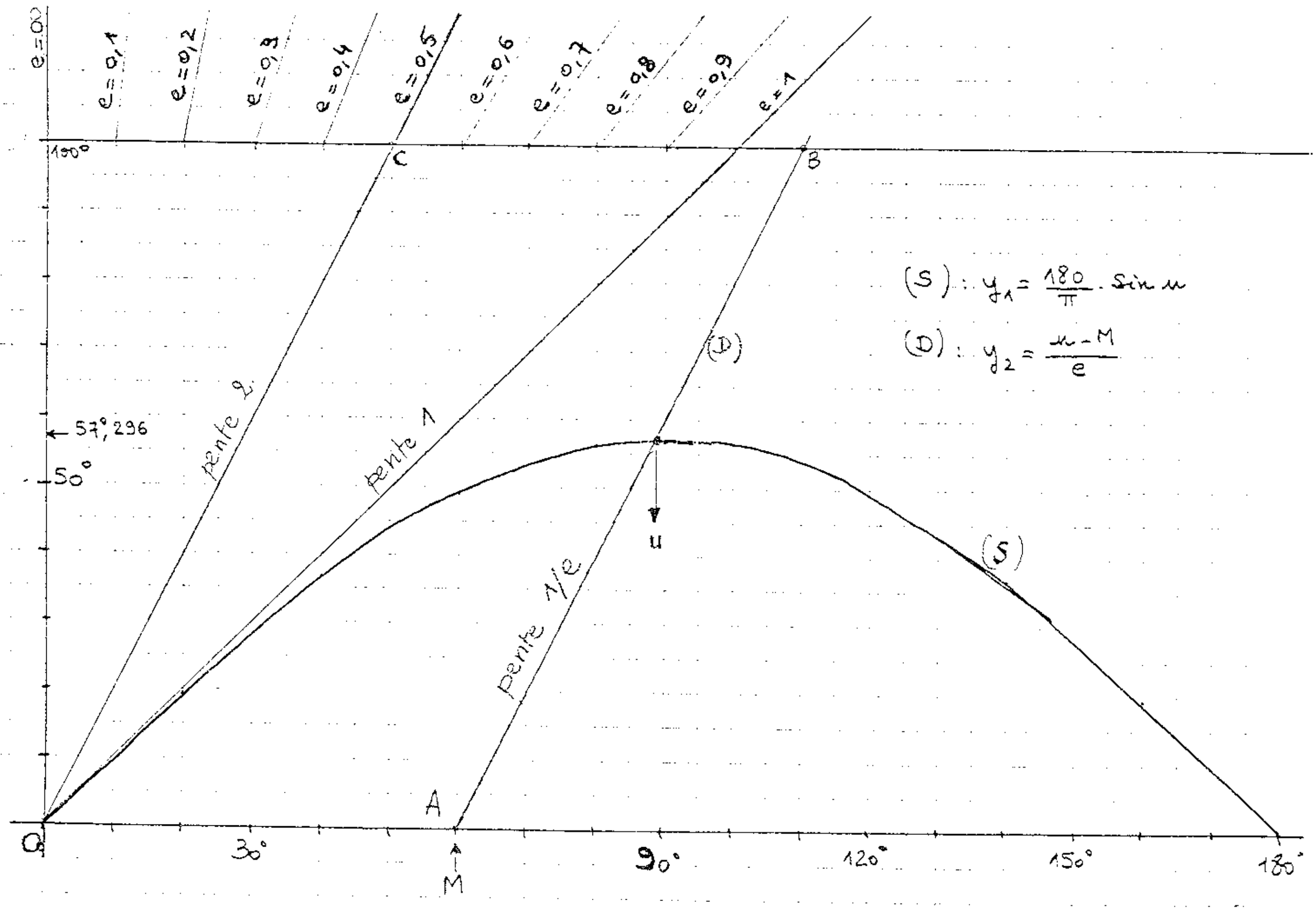

fig.5

c). Méthode d'itération de Newton.

1- Soit u_o une valeur approchée de la racine u cherchée. On a alors $M_o = u_o - e^o.\sin u_o$, et approximativement:

$$u-u_o = (M-M_o).\left(\frac{du}{dM}\right)_{u=u_o} \quad \text{au } 1^{er} \text{ ordre, avec } \frac{du}{dM} = \frac{1}{1-e.\cos u}$$

d'où:

$$\boxed{u_1 = u_o + \frac{M-u_o + e.180/\pi.\sin u_o}{1-e.\cos u_o}} \qquad (N1)$$

Cette valeur u_1 de u est plus approchée que u_o de la racine cherchée. On obtient par itération une valeur u_2 encore plus approchée en remplaçant u_o par u_1 dans (N1). Et ainsi de suite jusqu'à ce que $|u_n - u_{n-1}| < 10^{-p}$ où p est un nombre fixé au départ et définissant la précision.

2- Si l'excentricité e est petite devant 1 , une première valeur de u_o peut être $u_o = M - e^o.\sin M$ ou même simplement:

$$\begin{aligned} u_o &= M \text{ puis} \\ u_1 &= M + e^o.\sin u_o \\ u_2 &= M + e^o.\sin u_1 \qquad\qquad (N2) \\ u_3 &= \dots. \end{aligned}$$

jusqu'à obtenir la condition ci-dessus.

3- Voyons des exemples numériques:

.. e=0,1 et M=2°

On part de u_o=M=2 puis avec e^o= 0,1x180/π, on obtient successivement u_1=2°,199 96.. u_2=2°,219 94.. etc.. et après 8 itérations $u_8 = u_7$ = 2°,222 160 325... à 10^{-9} près.

.. e=0,9 et M=2°

Ici, l'excentricité est forte, et alors la convergence avec (N2) est très lente comme on peut en juger:

u_o = 2	u_{50} = 17,534 3
u_1 = 3,799 6	u_{80} = 17,544 014
u_2 = 5,417 2	u_{100}= 17,544 125 61
...	u_{120}= 17,544 130 07
u_{10}= 13,414 8	u_{130}= 17,544 130 24
u_{20}= 16,593 5	u_{140}= 17,544 130 28
.....	...

et finalement, à 10^{-10} près, u_{150}= 17°,544 130 283 6

Si on utilise la forme (N1), la convergence est rapide:

u_o = 2 u_1=19,898 u_2=17,6363 u_3=17,544 273

et u_4=17°,544 130 29

.. Pour les planètes, $e < 0{,}1$ sauf Mercure (0,205) et Pluton (0,25)
Avec une précision de 0,0001 (soit 0",4), il suffit de 2 itérations avec (N1) et au plus 6 avec (N2) bien plus simple.

.. Pour les comètes, d'excentricité généralement voisine de 1, seule la forme (N1) est utilisable:

Ex. Comète de Halley $e=0{,}9673$ et $M=1°$

(N1) fournit $u_7=u_6= 19°{,}503\ 549\ 320$ à 10^{-10} près et

(N2) donne ... $u_{253}= 19°{,}503\ 549\ 320$

Sans commentaires.

.. On retrouvera plus loin cette méthode. Il n'est d'ailleurs pas certain qu'elle soit due à Newton lui-même, car à la fin du XVII^e siècle, beaucoup de mathématiciens-calculateurs étaient sur la piste. Parmi eux, un peu plus tard, Alexis Clairaut prédit le retour de la comète de Halley pour 1759 à son perihélie.

d). Développements limités.

Pour de plus amples renseignements sur ce paragraphe, on se reportera à la page 172 de "Astronomie Générale" de André Danjon, Ed. Blanchard, 1980. C'est une "bible" ...

Il y démontre les résultats suivants:

On développe u et v en fonction de e et M au moyen de séries de Fourier de M.

$$u = M + \left(e-\frac{e^3}{8}+\frac{e^5}{192}+\ldots\right).\sin M + \left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{6}+\ldots\right).\sin 2M + \ldots$$

$$v = M + \left(2e-\frac{e^3}{4}+\frac{77}{96}.e^5+\ldots\right).\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\frac{17}{192}e^6+\ldots\right).\sin 2M + \ldots$$

Ces développements ne sont vraiment utiles que pour de faibles valeurs de e, car la convergence est assez lente. D'ailleurs, Laplace a montré que si $e > 0{,}662$, cette convergence peut ne pas exister pour certaines valeurs de M.

Néanmoins, en ne gardant que les premiers termes, le développement de v rendra de bons services pour utiliser un planétaire:

$$v = M + 180/\pi.(2e.\sin M + 1{,}25.e^2.\sin 2M)$$

Voir à ce sujet le modèle proposé dans le C.C. n° 24.

e). Usage de l'informatique.

L'informatique (micro-ordinateurs ou calculatrices programmables) permettent de ne plus faire"à la main" les calculs que l'on disait justement "astronomiques".

Voici un exemple de programme utilisant la méthode d'itération de Newton, adaptable sur des calculatrices du genre (publicité gratuite !) Casio FX 702P ou Sharp PC 1251 ou 1500 ou... ou bien sûr, sur micro-ordinateur, en Basic (ou autre langue).

Les ordinateurs (et non les calculatrices) utilisent les fonctions trigonométriques avec des angles en radians. Le nombre G sert à faire la transformation.

```
10 Input "Excentricité ";E
20 Input " M= "; M
30 G=3.141592653 / 180
40 U=M*G
50 If E<0.5 Then W=M*G + E*Sin(U) : Goto 54
52 W=U+(M*G + E*Sin(U) - U)/(1-E*Cos(U))
54 If ABS(W-U)> (10↑-6)*G Then U=W : Goto 50
56 U=W
60 Print "U="; U/G
```

Pour les planètes, e < 0,2 . On peut faire encore plus simple donc avoir une exécution plus rapide: il suffit de remplacer les lignes 50, 52,54,56 par une seule:

```
50 For I=1 To 7 : U=M*G + E*Sin(U) : Next I
```

Ainsi (EK) est résolue par une seule ligne de calculs. Ah! si Kepler savait ça....

(... à suivre)

Michel Toulmonde

* *

LES CAHIERS CLAIRAUT - Bulletin de liaison du CLEA
Directeur de la publication: L. Gouguenheim Université Paris Sud
Laboratoire d'Astronomie Bât.426 91405 ORSAY CEDEX

Edité à l'Université Paris Sud, Laboratoire d'Astronomie Bât. 426 91405 ORSAY CEDEX
Prix du numéro: 10f; abonnement annuel (4 numéros) 35 f.
Dépot légal: 1er semestre 1979
Numéro d'inscription à la CPPAP: 61660