DE NEWTON A KEPLER ....
AVEC LA CALCULETTE DU PHYSICIEN .

L'objet de cet article est d'apporter quelques compléments à l'article de JP ROSENSTIEHL publié dans le n° 21 des Cahiers Clairaut , sous le titre :" De Newton à Kepler ... avec une calculette "

L'étude proposée des trajectoires des astres du système solaire par une méthode numérique est en effet extrêmement intéréssante . En cours de physique cependant il serait dommage de ne pas rendre plus concrets les résultats obtenus :

.en définissant le système d'unités utilisé

.en donnant des valeurs numériques parlantes pour les différentes planètes ou comètes qui décrivent des ellipses autour du Soleil

Voilà les deux objectifs de mon propos .

UN SYSTEME D'UNITES COHERENT ET COMMODE :

JP ROSENSTIEHL part bien sûr de la loi de Newton : $\vec{F} = \frac{-GmM}{r^2}\vec{u}$

Sur deux axes cartésiens , les équations du mouvement sont :

$$\frac{dv_x}{dt} = -GM\frac{x}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -GM\frac{y}{r^3}$$ M étant la masse du Soleil

L'auteur nous dit :" par un choix d'unités , posons GM = 1 " . Posons nous donc la question :

"Quelles unités doit on choisir pour que la valeur de GM soit 1 ?"

Quelles grandeurs sont utilisées ? Trois grandeurs fondamentales : masse , distance , temps , et une grandeur dérivée , la vitesse .

Dans le système international , les unités correspondantes sont le kilogramme , le mètre et la seconde (donc le m/s) . Dans ce système GM vaut $1,327\ 10^{20}$.

Pour parler du système solaire il est naturel de garder le kilogramme comme unité de masse et de prendre l'unité astronomique (UA) , le rayon de l'orbite terrestre, comme unité de distance . Dès lors , la nouvelle unité de temps est imposée par la condition GM = 1 . Calculons en secondes cette nouvelle unité de durée .

Ecrivons l'équation aux dimensions . D'après $\frac{dv}{dt} = -GM\frac{x}{r^3}$ on peut écrire :

$$LT^{-2} = GM.L.L^{-3} \quad \text{soit} \quad GM = L^3.T^{-2} \qquad (1)$$

Appelons L ,T et (GM) les unités et valeur de GM dans le système international et L' , T' et (GM)' les mêmes grandeurs dans notre système (où donc (GM)' vaut 1)
D'après (1) on a :

$$\frac{(GM)'}{(GM)} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{+3}\left(\frac{T'}{T}\right)^{-2} \qquad \text{Donc} \left(\frac{T'}{T}\right)^{-2} = \frac{(GM)'}{(GM)}\left(\frac{L'}{L}\right)^{-3}$$

Ici (GM)' = 1 (GM) = $1,327\ 10^{20}$ uSI L' = 1 UA = $1,5\ 10^{11}$ m

On trouve donc T' = $5,04\ 10^6$ s = 58,4 jours

Cela nous conduirait donc à prendre comme unité de durée cette valeur de 58,4 j soit à peu près deux mois . C'est une valeur très intéréssante car elle correspond bien aux durées astronomiques . Nous la conserverons donc .

Récapitulons ; les valeurs dont nous allons parler dans la suite seront exprimées:

. en kilogrammes pour les masses
. en unités astronomiques pour les distances

. en "double mois" (1 dm = 58,4 j) pour les durées
. en km/s (qui parle mieux à l'esprit) et en UA/dm (pour la coherence des calculs) pour ce qui concerne les vitesses .

CALCUL DES ELEMENTS DES ORBITES

Le programme , très général , de JP ROSENSTIEHL , suppose connues la position initiale P_o de l'astre , donnée par ses coordonnées X_o et Y_o ; et sa vitesse initiale $\vec{V_o}$ (V_{Xo} et V_{Yo}) . P_o et $\vec{V_o}$ peuvent être absolument quelconques .

Cependant il est plus parlant de donner aux élèves comme position initiale le point où l'astre est le plus éloigné du Soleil , l'aphélie . Or , en général , les ouvrages facilement accessibles ne donnent pas la vitesse à l'aphélie (qui a la gentillesse de se trouver perpendiculaire au rayon vecteur) qui est la vitesse minimale de l'objet sur son ellipse trajectoire .

Les calculs qui suivent visent donc à calculer la distance à l'aphélie et la vitesse à l'aphélie à partir des données accessibles : les distances à l'aphélie et au périhélie pour les planètes ; le demi-grand axe a et l'excentricité e pour quelques comètes .

Il est hors de question de faire exécuter ces calculs aux élèves de lycée ; ils sont là pour justifier les valeurs numériques données par la suite . Ceci bien sur dans notre système d'unité .

1) CAS DES PLANETES :

En coordonnées polaires , le Soleil étant au centre des coordonnées , l'équation de la trajectoire est :

(2) $$r = \frac{p}{1 - e.\cos\theta}$$ p paramètre e excentricité

A l'aphélie (et au périhélie) , r est extrêmal , donc la vitesse radiale $\frac{dr}{dt}$ est nulle et la vitesse se réduit à la vitesse tangentielle $r\frac{d\theta}{dt}$.

Le mouvement est dû à une force centrale (l'attraction gravitationnelle) , donc le moment cinétique est constant , donc

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = C \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{mr2} \quad (3)$$ quelque soit r

Il y a une deuxième constante dans ce mouvement : l'énergie totale du système constitué par le Soleil et la planète , système isolé en première - et bonne - approximation . L'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation . Elle vaut :

$$E = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

Si cette quantité E est constante , elle prend la même valeur au périhélie et à l'aphélie . Donc :

$$\frac{1}{2}mr_M^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_M^2 - \frac{GMm}{r_M} = \frac{1}{2}mr_m^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_m^2 - \frac{GMm}{r_m}$$

r_M distance à l'aphélie
r_m distance au périhélie

A partir de cette relation , et en tenant compte de (2) et (3) on arrive sans difficulté à :

$$C^2 = m^2\ GMp \qquad \text{soit} \qquad C = m\sqrt{GMp}$$

D'après (3) la vitesse tangentielle que nous prendrons par la suite comme vitesse initiale est donc :

$$V_o = \frac{\sqrt{GMp}}{r}$$

Dans notre système d'unité , GM vaut 1 * . Donc enfin $V_o = \frac{\sqrt{p}}{r_M}$

Reste à calculer p ; c'est évident :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{r_M} = \dfrac{1-e}{p} \\[2em] \dfrac{1}{r_m} = \dfrac{1+e}{p} \end{array}\right] \rightarrow p = 2\,\frac{r_M r_m}{r_M + r_m}$$

Pour les valeurs numériques , à partir de r_M et r_m donnés dans la littérature , on calculera p puis V_o .

2) CAS DES COMETES :

Pour une comète en général on donne le demi grand axe et l'excentricité de l'orbite . On va appliquer les mêmes formules que celles démontrées au paragraphe pécedent . Il suffit alors de calculer le paramètre p et la distance à l'aphélie r_M en fonction de a et e .

Le calcul du paramètre est simple : $r_M + r_m = 2a$

$$\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = 2a$$

Donc $p = a(1 - e^2)$

Par ailleurs $r_M = \dfrac{p}{1-e} = a(1+e)$

Donc $V_o = \dfrac{\sqrt{p}}{r_M} = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$

DONNEES NUMERIQUES

1) PLANETES :

Planète	Aphélie UA	Vitesse à l'aphélie UA/dm	km/s	Période dm	j/an
Mercure	0,47	1,29	38,7	1,51	88j
Venus	0,73	1,16	34,8	3,87	224,7 j
Terre	1,017	0,98	29,5	62,9	365,26 j
Mars	1,67	0,74	22,2	11,8	687 j
Jupiter	5,45	0,42	12,6	74,6	11,86 ans
Saturne	10,1	0,31	9,3	185,2	29,46 ans
Uranus	20,1	0,218	6,6	528	84,01 ans
Neptune	30,3	0,181	5,4	1036	164,8 ans
Pluton	49,3	0,123	3,69	1557	247,7 ans

2) COMETES

Comète	Aphélie UA	Vitesse à l'aphélie UA/dm	km/s	Période dm	j ou an
Encke	4,08	0,194	5,82	20,7	3,3
Tsu Chi Chan	5,40	0,303	9,09	42,7	6,8
Halley	35,3	0,0306	0,92	478	76,09
Grigg-Mellish	59,1	0,0229	0,69	1033	164,32

EXEMPLE D'UTILISATION : PLUTON

La plupart des planètes ont des orbites presque circulaires , peu intérèssantes à tracer dans la mesure où elles ne se distinguent pas , à l'échelle du dessin , d'un cercle . Pluton est l'exception .

Les conditions initiales sont $X_o = 49,3$ UA, $Y_o = 0$; $V_{Xo} = 0$, $V_{Yo} = 0,123$ UA/dm

On trace un repère cartésien sur une feuille 21x29,7 à l'échelle 1 cm = 3 UA Comme pas de calcul on prend T = 50 dm .

On trouve une période de révolution comprise entre 1550 dm (X = 49,2 UA ; Y = - 4,63 UA) et 1600 dm (X = 48,7 UA ; Y = 1,58 UA) . Alors que la période théorique est 1557 dm : résultat donc satisfaisant .

A noter qu'il ne faut pas être trop pressé , et prendre un pas de calcul trop grand devant la période : l'ellipse ne se ferme pas . Il faut au plus un pas 30 fois plus petit que la période .

Christian BUTY

LES POTINS DE LA VOIE LACTEE

LA STRUCTURE DE L'UNIVERS A GRANDE ECHELLE : LE VIDE DU BOUVIER.

S'il est bien clair depuis la découverte des galaxies que l'Univers observé n'est pas homogène à l'échelle des galaxies et des amas de galaxies, c'est plus récemment que la structure à plus grande échelle que constituent les superamas a été reconnue. Que sait-on aujourd'hui de la taille caractéristique des plus grandes structures dans l'Univers ? Cette question est importante pour la cosmologie car elle détermine l'échelle à laquelle il faut se placer pour pouvoir considérer l'Univers comme un "fluide homogène" et elle pose le problème de l'origine et de la formation de ces hétérogénéités. Durant ces dernières années d'importants travaux systématiques ont été réalisés sur de grands échantillons de galaxies.En particulier la mesure de la vitesse radiale est fondamentale car elle permet de localiser la galaxie en utilisant la loi de Hubble comme indicateur de distance (distance = vitesse /H_o où H_o est la constante de Hubble; on utilisera ici H_o = 75 kms^{-1} Mpc^{-1}; 1 Mpc = 3,26 millions d'années de lumière).En 1981, une étude de 133 galaxies situées dans la direction de la constellation du Bouvier, dans plusieurs champs, jusqu'à des vitesses de 50000 kms^{-1} a révélé qu'il existait une zone quasiment vide de galaxies entre 12000 et 18000 kms^{-1}. Ce domaine de 6000 kms^{-1} correspond à une extension en profondeur de 80 Mpc. Par ailleurs, ce vide est observé sur une extension perpendiculaire à la ligne de visée de ≈30°, ce qui correspond à une dimension linéaire de ≈110 Mpc à la distance moyenne où se trouve ce vide (15000 km s^{-1} correspond à 200 Mpc). Ces résultats indiquent la présence d'une vaste région vide de galaxies dont le volume est de l'ordre du million de Mpc^3. Une récente étude plus détaillée dans 282 petits champs couvrant cette région, a bien confirmé l'existence de ce vide intergalactique géant dont le diamètre est de l'ordre de 100 Mpc. Cette dimension caractéristique est aussi celle des superamas -en structure filamentaire- qui entourent les vides et où se concentre la matière.

L.Bottinelli