ASTRONOMIE, MATHEMATIQUE ET ALGORITHME
I - DUREE DU JOUR ET AZIMUT DU LEVER DU SOLEIL

On veut étudier les variations de l'azimut du lever du soleil et de la durée du jour en fonction de la latitude du lieu considéré et de la date.

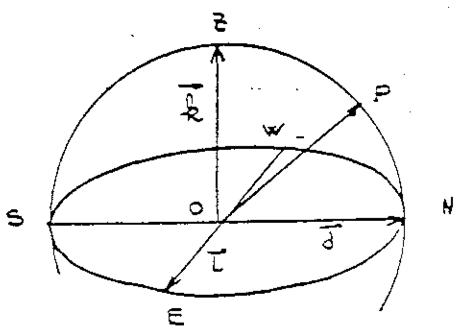
Pour calculer l'azimut du lever et son angle horaire on fait souvent appel aux relations entre coordonnées horizontales et coordonnées horaires (cf p.30 des éphémérides du bureau des longitudes). Ces relations se déduisent elles-mêmes très simplement des formules élémentaires de la trigonométrie sphérique (cf Cahiers Clairaut n° 6). Mais on peut trouver ces dernières trop rébarbatives ou trop loin des programmes actuels de mathématique.

Il est possible de calculer l'azimut et l'angle horaire du soleil à son lever en n'utilisant que les notions élémentaires de calcul vectoriel enseignées en classe de 1ère. Ce qui, autour d'un thème astronomique, est un bon exercice sur les notions suivantes : coordonnées - angles orientés - géométrie sur la sphère - trigo.

Les calculs qui suivent ont été le point de départ pour des élèves du Lycée Berthollet d'Annecy pour étudier à l'aide d'un micro-ordinateur les variations de l'azimut du lever du soleil et de la durée du jour.

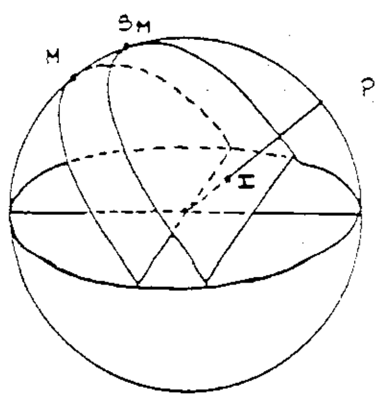
1 - Repère utilisé

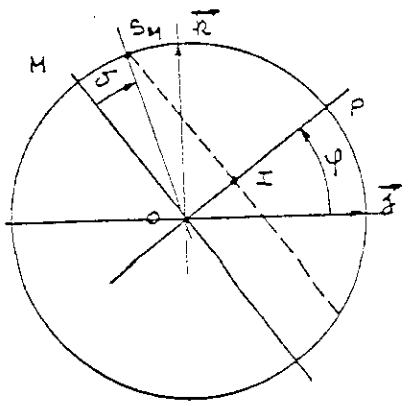
Pour un lieu donné O on considère le repère orthornormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; la sphère céleste a pour rayon 1. P est le Pôle céleste



2 - Position du "petit cercle diurne"

(cercle décrit par le soleil pour une date donnée)
φ est la latitude, δ la déclinaison du soleil, S_M le passage du soleil au méridien.

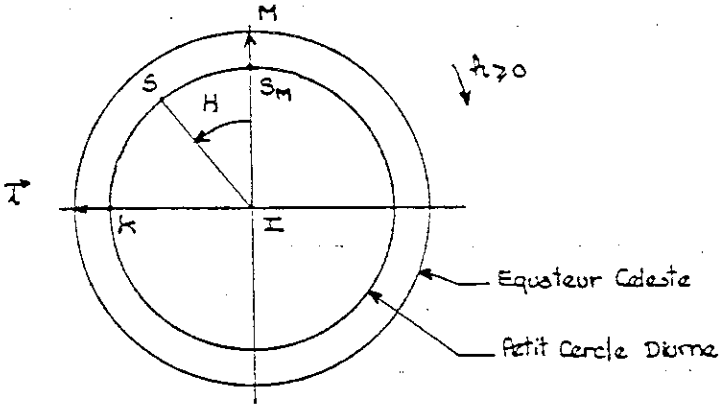




$\overrightarrow{OP}\left|\begin{array}{l}0\\ \cos\varphi\\ \sin\varphi\end{array}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}0\\ -\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{array}\right.$ $\quad$ $\overrightarrow{OI} = \sin\delta\ \overrightarrow{OP}$ $\quad$ $\overrightarrow{OI}\left|\begin{array}{l}0\\ \sin\delta\ \cos\varphi\\ \sin\delta\ \sin\varphi\end{array}\right.$

3 - Position du soleil sur ce "petit cercle diurne"

H est l'angle horaire du soleil : $H = \langle \overrightarrow{IS_M}, \overrightarrow{IS} \rangle$ sens rétro.



4 - Position du soleil en fonction de φ, H et δ

$\overrightarrow{IS_M} = \cos\delta\ \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{IK} = \cos\delta\ \vec{i}$ (cf. figures ci-dessus)

$\overrightarrow{IS} = \cos H\ \overrightarrow{IS_M} - \sin H\ \overrightarrow{IK}$ (cf. figures ci-dessus - attention à l'orientation de H !)

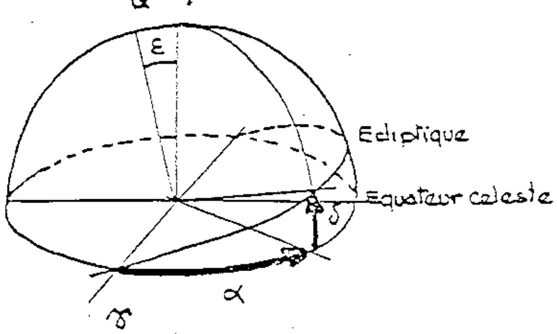
$= \cos H \cos\delta\overrightarrow{OM} - \sin H \cos\delta\ \vec{i}$

$\overrightarrow{IS}\left|\begin{array}{l}-\sin H\cos\delta\\ -\cos H\cos\delta\sin\varphi\\ \cos H\cos\delta\cos\varphi\end{array}\right.$

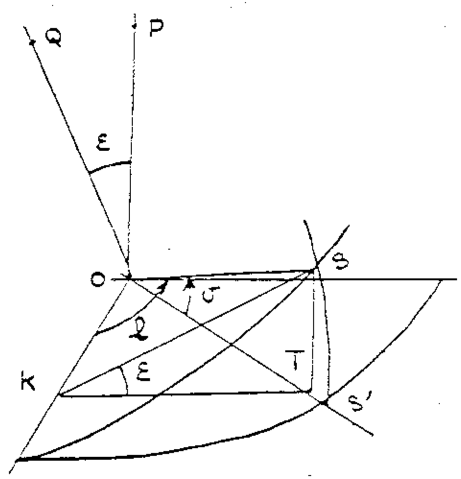
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IS}$

$\overrightarrow{OS}\left|\begin{array}{ll}-\sin H\cos\delta & (1)\\ \sin\delta\cos\varphi - \cos H\cos\delta\sin\varphi & (2)\\ \sin\delta\sin\varphi + \cos H\cos\delta\cos\varphi & (3)\end{array}\right.$

5 - Variation de δ avec la date



α : ascension droite ; δ : déclinaison



ST = $\sin\delta$, ST = SK $\sin\varepsilon$ et SK = $\sin \ell$ $\Longrightarrow$ $\sin\delta = \sin \ell \sin\varepsilon$

$$\sin\delta = \sin \ell \sin \varepsilon$$

ℓ varie de 360° en 365 jours ; si n est le nombre de jours écoulés depuis le dernier équinoxe de printemps (S en γ et $\ell = 0$) alors :

$$\ell = n \times \frac{360}{365.25} \qquad \text{ou} \qquad \ell = n \times \frac{2\pi}{365.25}$$

Conclusion : la date donne n d'où l'on déduit ℓ puis δ

6 - Application

6.1 - Durée du jour

Le soleil se lève si z = 0

$z = 0 \Longleftrightarrow \sin\delta \sin\varphi + \cos H \cos\delta \cos\varphi = 0 \Longleftrightarrow \cos H = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi$ (4)

Remarque : on exclut $\varphi = 90°$
l'heure de lever est donc donnée par :

$$\begin{cases} \cos H = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi & (4) \\ H \in [-180, 0] \end{cases}$$

Remarques : - si $\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi > 1$, (4) n'a pas de solution, il n'y a pas de "levé" la durée du jour est de 24 heures

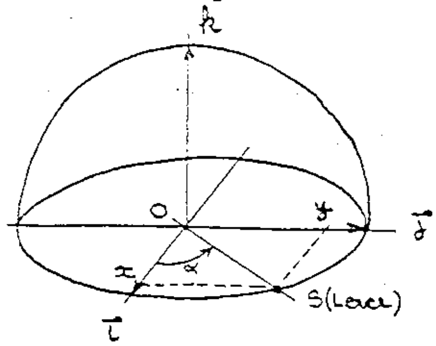
- si $\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi < -1$, (4) n'a pas de solution, il n'y a pas de "levé" la durée du jour est de 0 heures

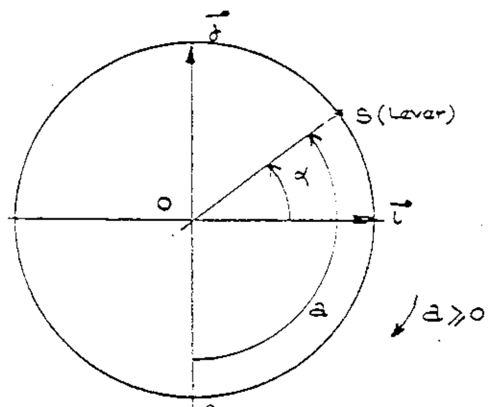
- Pour $\varphi = 0$ on retrouve bien H = - 90°
- Pour $\delta = 0$ (Equinoxe) on retrouve bien H = - 90°

La durée du jour sera donc 2 |H| à convertir en heures

6.2 - Azimut du lever

z = 0 donne H ; (1) et (2) donnent x et y ; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ donne $\alpha = \langle \vec{i}, \vec{OS} \rangle$





L'azimut du lever est l'angle $a = \langle -\vec{j}, \vec{OS} \rangle$ orienté dans le sens indirect
$a = -(\alpha + 90°)$

7 - Algorithme de calcul

(il peut être traduit facilement dans divers langages : TI, HP, BASIC...)

```
Début
|  ε ← 23.5 ;
|  lire φ  ; (en degrés décimaux)
|  lire n  ; (entier)
|  φ ← φ * π /180 ;
|  ε ← ε * π /180 ;
|  ℓ ← n * 2 * π /365.25 ;
|  δ ← Arc sin (sin ℓ *sin ε ) ;
|
|  cas
|  |  tg δ * tg φ ≥ 1 : Durée du jour ← 24 ;
|  |  tg δ * tg φ ≤ -1 : Durée du jour ← 0 ;
|  |  -1 < tg δ * tg φ < 1 : H ← Arc cos (-tg δ * tg φ ) ;
|  |                         x ← -sin (H) * cos δ ;
|  |                         y ← sin δ * cos φ - cos δ * cos H * sin φ ;
|  |                         α ← Arc tg (y/x) ;
|  |                         α ← α * 180/π ;
|  |                         a ← -( α + 90) ;
|  |                         Durée du jour ← 2 * ABS (H) * 12/π ;
|  fin_cas
|
|  Afficher Durée du jour ; (en heures décimales)
|  si Durée du jour ∈ {0, 24}  alors afficher "pas de lever"
|                              sinon afficher a  (azimut en degrés décim.)
fin
```

Jean-Claude ALLARD

§ § § § § § § § § § § § § § § § § § §

LES CAHIERS CLAIRAUT - Bulletin de liaison du CLEA
Directeur de la publication: L. Gouguenheim Université Paris-Sud
Laboratoire d'Astronomie Bat 426 91905 ORSAY CEDEX
Comité de Rédaction: D. Bardin, L. Bottinelli, J. Dupré, M. Gerbaldi, L. Gouguenheim
J.P. Parisot, J. Ripert, D. Toussaint, V. Tryoën, G. Walusinski.
Edité à l'Université Paris-Sud, Laboratoire d'astronomie Bat.426 91405 ORSAY CEDEX
Prix du numéro: 10f; abonnement annuel (4 numéros): 35f
Dépot légal: premier trimestre 1979; numéro d'inscription à la CPPAP: 61660