ROTATION DE LA TERRE SUR ELLE-MEME ET DISTANCE TERRE-LUNE

Lors de l'école d'été de Sophia Antipolis, en juillet 1982, notre ami Victor Tryoën a animé un groupe de travail sur les mouvements de la Lune,au cours duquel il a signalé:
- que le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même se ralentit par effet de marée
- que la distance Terre-Lune augmente
- que ces deux effets sont liés.

Il m'est venu la curiosité de démontrer cette liaison et de vérifier les ordres de grandeur de ces effets observés. C'est le sujet du présent article. Il me semble qu'il peut donner lieu à des problèmes résolvables par des élèves de terminales C ou D, moyennant quelques adaptations.

Si on veut le décrire complètement, le mouvement de la Lune est un problème à trois corps (Terre, Lune, Soleil) soumis à plusieurs centaines de perturbations périodiques ou séculaires, ce qui le rend très difficile. Ainsi les marées sur Terre sont-elles causées principalement par la Lune, mais le Soleil intervient aussi: le rapport des forces de gravitation exercées par la Lune et par le Soleil sur une masse d'eau à la surface de la Terre est 2,2 (1).

Pour ce qui nous intéresse, cependant, je négligerai les effets du Soleil, et je considérerai le système Terre-Lune comme isolé dans l'espace. C'est que j'étudie le mouvement de rotation sur lui-même de ce système: en quelque sorte je rapporte l'action du Soleil au centre de masse Terre-Lune. De plus, je n'étudie pas comment les marées ralentissent la rotation de la Terre: ce ralentissement étant constaté, je veux montrer comment il s'en suit un ralentissement de la Lune.

Deuxième approximation: dans le mouvement de rotation, je confondrai le centre de masse du système avec le centre de la Terre, et la Lune sera supposée décrire une orbite elliptique keplérienne autour du centre de la Terre.

La loi physique qu'il faut appliquer est dès lors simple: le moment cinétique de l'ensemble Terre-Lune se conserve. Or ce moment cinétique total $\vec{I}$ est dans le repère galiléen du centre de masse la somme de trois termes:

1°) <u>le moment cinétique de rotation de la Terre sur elle-même</u>, $\vec{I}_T$. Il est dirigé suivant l'axe des pôles et fait donc un angle de 23°27' avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique. En intensité il vaut:

$$I_T = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \Omega$$

M_T = masse de la Terre = 6×10^{24} kg

R_T = rayon de la Terre = $6,4 \times 10^8$ m

Ω est la pulsation de la Terre. Elle vaut $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période de rotation, donc la durée du jour sidéral, puisque le repère galiléen utilisé est orienté suivant les pôles. Donc T vaut 86 164 s.

Cette expression de I_T suppose que la Terre est une sphère homogène, ce qui est un peu osé, mais finalement pas trop faux.

2°) <u>Le moment cinétique de rotation de la Lune sur elle-même</u>, $\vec{I}_L$. Il est dirigé suivant l'axe de rotation de la Lune, qui fait un angle de 6° avec la normale au plan de l'orbite lunaire, lui-même incliné de 5° sur le plan de l'écliptique. Il vaut en intensité:

$$I_L = \frac{2}{5} m_L R_L^2 \omega'$$

m_L = masse de la Lune $\simeq M_T / 81$

R_L = rayon de la Lune = 0,272 R_T

ω' = pulsation de rotation propre de la Lune

3°) <u>le moment cinétique de rotation de la Lune autour de la Terre</u>, $\vec{I}'$. Il est perpendiculaire au plan de l'orbite lunaire. En intensité il vaut:

$$I' = m_L V r$$

V = vitesse de la Lune

r = distance Terre-Lune

Ici intervient pour simplifier le calcul une autre approximation. Cette orbite elliptique de la Lune a pour excentricité 0,055. On l'assimilera à un cercle pour lequel on utilisera encore la troisième loi de Kepler. Alors si on note ω la pulsation et D le demi grand axe on a:

$$V = D\omega$$
$$r = D \qquad \text{donc} \qquad I' = m_L D^2 \omega$$

D'après la troisième loi de Kepler:

$$D^3 / \tau^2 = G(M_T + m_L) / 4\pi^2 \qquad \text{Or} \quad 2\pi / \tau = \omega$$

Donc, en négligeant m_L devant M_T:

$$D^3 \omega^2 = G M_T \qquad \text{et} \qquad \omega = G^{\frac{1}{2}} M_T^{\frac{1}{2}} D^{-3|2}$$

Enfin:

$$I' = m_L G^{\frac{1}{2}} M_T^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$$

Le moment cinétique total vaut donc, en projection sur la perpendiculaire au plan de l'écliptique:

$$I = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \Omega \cos 23° 27' + \frac{2}{5} m_L R_L^2 \omega' P + m_L G^{\frac{1}{2}} M_T^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$$

le facteur P qui intervient dans le deuxième terme traduit la projection de $\vec{I}_L$ sur l'axe choisi.

Cernons les facteurs qui changent au cours du temps. La pulsation propre de la Terre, Ω, diminue puisque la durée du jour augmente; la distance D de la Terre à la Lune augmente; par contre, la vitesse de rotation sur elle-même reste constante.

Ecrivons donc que la variation ΔI du moment cinétique total est nulle.

$$\Delta I = \frac{2}{5} M_T R_T^2 \cos 23° 27' \Delta\Omega + \underset{\text{car } \Delta\omega' = 0}{\underset{\downarrow}{0}} + \frac{1}{2} m_L G^{\frac{1}{2}} M_T^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \Delta D \cos 5° = 0$$

donc $\quad \Delta D = - \frac{4}{5} M_T^{\frac{1}{2}} R_T^2 m_L^{-1} (\cos 5°)^{-1} \cos 23° 27' \; G^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} \Delta\Omega$

or $\quad \Omega = 2\pi / T \quad$ d'où $\quad \Delta\Omega = - 2\pi \Delta T / T^2$

donc: $\quad \Delta D = 2\pi \dfrac{4 \times 81}{5} M_T^{-\frac{1}{2}} R_T^2 \; G^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} T^{-2} \Delta T \cos 23°27' (\cos 5°)^{-1}$

Je suis arrivé à ce que je voulais démontrer: ralentissement de la rotation propre de la Terre et éloignement de la Lune sont liés. Si la Terre se ralentit, son moment cinétique diminue; puisque celui de la Lune sur elle-même est constant, pour que le moment cinétique total se conserve, il faut que la Lune s'éloigne de la Terre, augmentant ainsi son moment cinétique.

Faisons l'application numérique:

$M_T = 6 \times 10^{24}$ kg $\quad R_T = 6{,}4 \times 10^6$ m $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI

$D = 3{,}84 \times 10^8$ m $\quad T = 8{,}6164 \times 10^4$ s

L'augmentation de la durée du jour est $\Delta T = 1{,}64 \times 10^{-5}$ s par an

On en déduit: $\Delta D = 3{,}4$ cm par an

la valeur mesurée (2) est environ 3 cm par an.

Où allons-nous ? Il y a 300 millions d'années, le jour durait 22 heures, il y en avait 400 dans l'année (3). Quand le couplage Terre-Lune sera terminé, le jour durera 50 de nos jours actuels (2)*. Une simple règle de trois permet de dire que ce sera en gros dans 250 milliards d'années. La Lune sera alors à une distance de 1 500 rayons terrestres, contre 60 aujourd'hui (la distance de la Terre au Soleil vaut 25 000 rayons terrestres).

Mais tout ceci n'est qu'une extrapolation hardie, car bien avant ces 250 milliards d'années, le Soleil sera devenu une géante rouge (dans 5 milliards d'années) et sa couronne aura atteint la Terre ...

Christian BUTY

BIBLIOGRAPHIE

(1) Astronomie Générale (p.100) Bakouline, Kononovitch, Moroz Ed. MIR

(2) Principles of Astronomy (p.138-139) Stanley Wyatt, Ed. Allyn and Bacon

(3) Méthodes de l'Astrophysique (p.38) Lucienne Gouguenheim, Hachette

(4) Eléments d'Astronomie de Position (p.218-219), Danloux Dumesnil, Ed. Blanchard (fournit les éléments de calcul et un résultat faux)

* *Remarque:*

Ceci est en contradiction avec la démonstration précédente. En effet, à ce stade ultime de l'évolution du système Terre Lune, la Lune et la Terre se feront face et auront la même vitesse de rotation propre. Donc la Lune tournera sur elle-même en 50 jours au lieu de 28; et j'ai supposé plus haut que cette vitesse ω' est constante...

Evaluons l'erreur commise, et pour cela le rapport $\Delta J_L / \Delta J_T$ (j'avais négligé ΔJ_L).

$$\Delta J_L / \Delta J_T = (\tfrac{2}{5} m_L R_L^2) / (\tfrac{2}{5} M_T R_T^2)\ (\Delta \omega' / \Delta \Omega) = \frac{(0{,}272)^2}{81} (\Delta \omega' / \Delta \Omega)$$

Entre l'époque actuelle (1) et le stade final (2), la variation de Ω est:

$$\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = (2\pi / T_2) - (2\pi / T_1) = 2\pi \left(\frac{1}{50} - 1\right) = -2\pi \frac{49}{50}$$

$$\Delta\omega' = \omega'_2 - \omega'_1 = (2\pi/T'_2) - (2\pi/T'_1) = 2\pi\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{28}\right) = -2\pi\frac{22}{50 - 28}$$

$$\Delta\omega' / \Delta\Omega = 22 / (49 \times 28) \qquad \text{Donc} \quad \Delta J_L / \Delta J_T = \frac{22 \times (0,272)^2}{81 \times 49 \times 28} = 1,46 \times 10^{-5}$$

Vue l'ampleur de nos approximations, il était donc parfaitement légitime de négliger le deuxième des trois termes du moment cinétique total. Cela vient simplement du fait qu'il est bien plus facile de ralentir la Lune que la Terre.