

Éléments de correction :

A Le système binaire PRS 1913+16

A.1 Quelques informations sur l'objet céleste répertorié sous la désignation : PSR B1913+16

A.1.1 Analyse d'un document

Q1. Une année-lumière (al) est la distance parcourue par la lumière pendant une année :

$$1 \text{ al} = c \times \Delta t$$

avec

- $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la vitesse de la lumière
 - et $\Delta t = 365 \times 24 \times 3600 = 3,16.10^7 \text{ s}$ est la durée d'une année en unité SI (seconde)
- d'où $1 \text{ al} = 3.10^8 \times 3,16.10^7 = 9,5.10^{15} \text{ m}$

Q2. On appelle « Voie Lactée » la galaxie à laquelle appartient notre système solaire. Ordre de grandeur de la Voie lactée $\sim 100\,000 \text{ al}$.

La distance de PSR 1913+16 à la Terre est donnée de $23\,000 \text{ al}$ ce qui le situe très probablement (d'après les indications du texte) dans notre Galaxie.

Le Soleil est environ à huit minutes de lumière (le candidat peut aussi dire 150 millions de km) de la Terre, l'étoile 1913+16 est située à $23\,000 \text{ al}$ de la Terre est donc environ 1 milliard de fois plus loin de la Terre que le Soleil.

Q3. Les instruments actuels dont disposent les astronomes sont :

- les télescopes à miroirs dans le domaine de l'optique ainsi que dans l'infra-rouge et l'UV si ceux-ci sont placés en dehors de l'atmosphère terrestre (satellite)
- les antennes radiotélescopes dans le domaine radio
- les détecteurs X (ex Uhuru ou Chandra) et γ (Fermi)

Q4. Le fait qu'un astronome observe ce pulsar situé à $23,3.10^3$ années de lumière de lui ne peut lui garantir qu'il existe encore, car l'observation lui montre un objet « vieux » de $23,3.10^3$ années.

Q5. Une masse proche de celle du Soleil, logée dans une sphère de quelques dizaines de kilomètres de diamètre permet de faire un calcul d'ordre de grandeur de la masse volumique de l'objet 1913+16. On estime la masse volumique du pulsar à l'aide de la relation

$$\rho_p = \frac{M_p}{V_p}$$

avec

- $M_p \sim M_\odot \sim 10^{30} \text{ kg}$ est la masse du Soleil,

- et $V_p = \frac{4\pi}{3}R^3$ volume d'une sphère de rayon $R \sim 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}$ ce qui donne $V_p \sim (10^4)^3 = 10^{12} \text{ m}^3$

soit $\rho_p \sim \frac{10^{30}}{10^{12}} = 10^{18} \text{ kg.m}^{-3}$

On estime alors la densité nucléaire (ou masse volumique du noyau)

$$\rho_n = \frac{m_n}{V_n}$$

avec

- $m_n \sim 10^{-27} \text{ kg}$ est la masse d'un nucléon
- et $V_n = \frac{4\pi}{3}r_n^3$ volume d'un nucléon de rayon $r_n \sim 10^{-15} \text{ m}$ ce qui donne $V_n \sim (10^{-15})^3 = 10^{-45} \text{ m}^3$

soit $\rho_n \sim \frac{10^{-27}}{10^{-45}} = 10^{18} \text{ kg.m}^{-3}$

On constate que $\rho_p \sim \rho_n$ c'est-à-dire que ce type d'objet stellaire possède une densité voisine de la densité nucléaire. Pour des raisons de stabilité liées à la répulsion électrostatique, la force nucléaire faible transforme les protons en neutrons, d'où l'appellation d'*étoiles à neutrons*.

Remarque : Ce calcul ne permet en aucun cas de justifier pourquoi il s'agirait plutôt de neutrons que de protons.

Q6. Les deux types de propositions faites ici illustrent la diversité des possibilités en terme de niveau de maîtrise exigé des élèves. La première proposition vise plutôt un objectif d'approfondissement des notions, tandis que la seconde s'adresse à des élèves dont la culture scientifique est encore à construire et l'accès aux textes documentaires moins familier.

Précisions pour le jury pour l'harmonisation du barème :

Le niveau choisi par le candidat n'est pas un critère d'évaluation. Pour chaque définition on retiendra deux critères d'évaluation indépendants du niveau choisi :

- *l'expression du texte fait sens pour le candidat car ses questions sont pertinentes et les réponses sont exactes.*
- *le candidat a fait un effort de formulation qui amène l'élève à construire une réponse par un raisonnement, une analogie, un exemple, un schéma ou bien encore une comparaison avec d'autres usages de la langue...Il ne se contente pas de faire restituer des connaissances brutes.*

Points de vocabulaire :

« sources radios »

• **1ère proposition :**

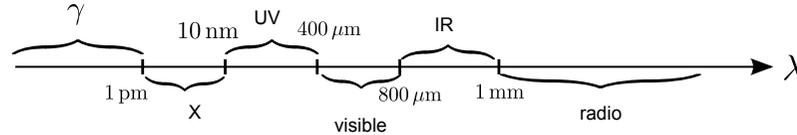
questions pour les élèves :

- (a) Qu'appelle-t-on onde électromagnétique ?
- (b) Qu'est-ce qu'un spectre électromagnétique ? Le représenter sous forme d'un diagramme en longueur d'ondes et nommez les différentes parties du spectre.

(c) Citez des sources terrestres d'ondes radios.

réponses :

- (a) Une onde électromagnétique correspond à une vibration de champs électriques et magnétiques couplés se propageant dans le vide à la vitesse de la lumière.
- (b) Un spectre électromagnétique est la décomposition d'un rayonnement électromagnétique en fonction de la fréquence f ou de façon équivalente de la longueur d'onde λ puisqu'on a la relation (dans le vide) $\lambda = \frac{c}{f}$



- (c) Sources terrestres :
- émetteurs TV
 - émetteurs radiodiffusion : grandes ondes et bande FM
 - téléphone mobile
 - communications internet sans fil : wifi

• **2ème proposition :**

questions pour les élèves :

- (a) Les ondes radio font-elle partie des ondes acoustiques ou électromagnétiques ?
- (b) Une onde radio de fréquence 1000 MHz est détectée par un radio télescope. Peut-on en faire une observation visuelle ?

réponses :

- (a) Il s'agit d'ondes électromagnétiques.
- (b) les longueurs d'onde visibles se situent entre 400 nm et 800 nm, ce qui correspond à des fréquences calculées par la relation $\nu = c/\lambda$ égales à $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz et $3,75 \cdot 10^{14}$ Hz. La lumière visible a une fréquence beaucoup plus élevée que les ondes radio.

« L'étoile s'effondre »

• **1ère proposition :**

questions pour les élèves :

- (a) Si on admet qu'une étoile assimilée à une sphère homogène de masse M et de rayon R a une énergie potentielle de gravitation de la forme

$$E_p = -kG \frac{M^2}{R}$$

où k est une constante qui dépend de la géométrie et G est la constante de gravitation universelle. En déduire qu'une perte d'énergie par rayonnement

doit se traduire par une diminution du rayon de l'étoile. On admet que l'énergie de l'étoile n'est ici que potentielle.

- (b) En déduire qu'en l'absence de source d'énergie (nucléaire par exemple) une étoile va nécessairement s'effondrer.

réponses :

- (a) Par conservation de l'énergie, une perte par rayonnement doit s'accompagner d'une diminution de l'énergie potentielle de l'étoile et donc puisque celle-ci est une fonction qui décroît lorsque R décroît, on en déduit que le rayon de l'étoile doit diminuer.
- (b) Puisqu'une étoile à une température non nulle, elle rayonne, donc elle perd de l'énergie, et d'après la question précédente on en déduit que l'étoile s'effondre sur elle-même.

• **2ème proposition :**

questions pour les élèves :

- (a) Quel concept de la physique vient justifier l'effondrement de l'étoile ?
- (b) Quels sont les mots qui vous semblent le mieux décrire cet « effondrement » de l'étoile ?

A : Des cavités apparaissent à sa surface,

B : Sa matière occupe un volume plus faible

C : L'étoile s'effrite en perdant de la matière

réponses :

- (a) C'est la loi de l'attraction universelle selon laquelle tous les objets s'attirent du fait qu'ils ont une masse.

- (b) Réponse **B**

« après avoir consommé tout son carburant nucléaire »

• **1ère proposition :**

questions pour les élèves :

- (a) Qu'appelle-t-on réaction de fusion et réaction de fission. Laquelle des deux s'attend-t-on à trouver au sein des étoiles ?

- (b) Pourquoi récupère-t-on de l'énergie dans cette réaction ?

- (c) Pourquoi ce processus de fusion a-t-il un terme ?

réponses :

- (a) On appelle *fusion* le processus de mise en commun de 2 noyaux nucléaires « légers » pour former un noyau plus « lourd » (avec éventuellement élimination ou création de particules), tandis que le mécanisme de *fission* correspond lui à la scission d'un noyau lourd en plusieurs noyaux (généralement 2 et avec éventuellement aussi élimination ou création de particules).

- (b) C'est la différence de masse (si on néglige en première approximation la masse des 2 positrons... et des neutrinos)

$$\Delta m = 4m_p - m_{He} > 0$$

qui, convertie par la relation d'Einstein $Q = (\Delta m)c^2$, fournit l'énergie nécessaire à l'équilibre de l'étoile.

- (c) Le gain énergétique dans le mécanisme de fusion est conservé jusqu'à la production de noyaux de fer. Au-delà les réactions nucléaires sont endothermiques (courbe d'Aston) et aucune réaction nucléaire ne pourra compenser les pertes d'énergie par rayonnement. L'effondrement gravitationnel s'en suivra donc inexorablement (moment dramatique s'il en est!).

• **2ème proposition :**

questions pour les élèves :

- (a) Donner une analogie et une différence entre le « carburant » d'une étoile et celui d'un moteur ?
- (b) Quel exemple de carburant nucléaire pouvez-vous donner ?
- (c) L'apparition de nouveaux noyaux lorsque le « carburant » réagit modifie-t-elle progressivement la masse de l'étoile ?

réponses :

- (a) Une analogie : c'est la libération d'énergie par une transformation de la matière, une différence : c'est que les entités sont des atomes ou des molécules (réaction chimique) dans un moteur tandis que ce sont des noyaux (réaction nucléaire) dans une étoile. Les ordres de grandeur des énergies libérées sont également très différents. Pour une masse donnée de matière l'énergie nucléaire libérée est beaucoup plus conséquente que l'énergie chimique.
- (b) Des noyaux d'hydrogène, d'hélium.
- (c) La masse diminue même si les noyaux formés sont de plus en plus « lourds ». C'est à ce prix que l'étoile brille !

Q7. Une découverte scientifique n'est jamais le fruit d'un pur hasard, compris comme une évidence qui apparaîtrait naturellement (comme spontanément) aux yeux de l'expérimentateur. Au contraire, toute découverte s'inscrit toujours dans le cadre d'un programme de recherche. L'aspect surprenant de certains résultats découlant alors d'un « désaccord » avec un schéma théorique attendu. Voici quelques exemples :

- la découverte du fond diffus cosmologique : Penzias et Wilson, deux chercheurs des laboratoires Bell, cherchant à étalonner leur détecteur radio dans des régions du ciel « dépourvues de sources » découvrirent un signal résiduel qu'ils attribuèrent *a posteriori* au rayonnement fossile dans le cadre du modèle de Big Bang.

- la découverte de la radioactivité : A la toute fin du XIXème siècle, l'utilisation de plaques photographiques dans le cadre de l'étude de la fluorescence de sels d'uranium par Henri Becquerel, conduisit celui-ci à la découverte d'une émission de rayonnement alors même que le matériau n'avait pas été soumis à une excitation lumineuse (suivant le principe habituel d'étude de la fluorescence). C'est l'analyse de cette « anomalie » dans le cadre, tel que compris à l'époque, du comportement de ce type de matériau qui permit à Becquerel d'identifier le nouveau phénomène.
- la découverte de l'action des courants électriques sur une boussole par Ørsted en 1820. C'est la similarité des comportements électrique et magnétique (existence de pôles électriques et magnétiques, phénomènes d'attraction-répulsion, etc.) qui conduisit plusieurs « savants » à la fin du XVIIIème siècle et au début du XIXème, à rechercher des interactions entre électricité et magnétisme (comme par exemple la magnétisation d'aiguilles par la foudre interprétée correctement comme un courant électrique). ce n'est donc pas par hasard qu'Ørsted découvrit cette action, mais c'est, semble-t-il, ses présupposés théoriques qui l'empêcheront pendant plusieurs années de concevoir la « bonne expérience ».
- la loi de la gravitation « découverte » par Newton en regardant tomber une pomme. On sait à présent que cette histoire est probablement apocryphe et que le processus par lequel Newton parvint à cette conclusion, résulte en réalité d'une longue recherche des lois mathématiques susceptibles « d'expliquer » les lois empiriques de Kepler.

A.1.2 Estimation de la taille d'un pulsar

Q8. Les étoiles sont plutôt des sphères gazeuses (plasma) cependant les forces de viscosité finissent par conférer à l'étoile une rotation uniforme identique à un solide. La nature sphérique de l'étoile est aussi une approximation car les forces d'inertie centrifuge ont tendance à (très) légèrement aplatiser aux pôles les corps célestes en rotation.

Q9. Définition du moment d'inertie d'un solide rapport à un axe Δ
Soit un petit volume $d\tau$ du solide autour d'un point P de masse dm et situé à une distance $r = HP$ d'un axe Δ .

On définit le moment d'inertie par la formule

$$I_{\Delta} = \int_{\text{tout le solide}} r^2 dm = \int HP^2 \rho(P) d\tau$$

On en déduit par analyse dimensionnelle que

$$I = kMR^2$$

En particulier pour une sphère le calcul détaillé donne $k = \frac{2}{5}$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe le moment cinétique $\mathbf{L} = I_{\Delta}\boldsymbol{\Omega}$

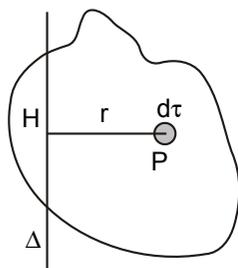


FIGURE 1 – Moment d'inertie par rapport à un axe Δ

Q10. Effet « patineuse »

- (a) Par conservation du moment cinétique (le système étant isolé) $\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i$ où les indices i et f font respectivement références aux états initial et final. Comme il s'agit de solide on a $I_{\Delta f}\Omega_f = I_{\Delta i}\Omega_i$ et puisque $\Omega = 2\pi/T$ on obtient la relation

$$\frac{T_i}{T_f} = \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2$$

- (b) Application numérique : on tire le rayon final de la relation précédente

$$R_f = R_i \sqrt{\frac{T_f}{T_i}} = 7.10^8 \sqrt{\frac{10^{-3}}{2,19.10^6}} = 1,5.10^4 \text{ m}$$

soit $R_f = 15$ km. C'est l'estimation de ce très petit rayon qui permet d'attribuer à ce corps le nom d'étoile à neutrons compte tenu de la densité voisine de la matière nucléaire.

A.2 Effet Doppler-Fizeau

A.2.1 Théorie

Q11. Effet Doppler :

- en acoustique : c'est un son de fréquence plus élevé lorsqu'une sirène vient vers un observateur et de fréquence plus basse lorsqu'elle s'en éloigne.
- en optique : effet de « rougissement » d'une source lumineuse qui s'éloigne d'un observateur et de « bleuissement » lorsqu'elle s'en éloigne.

Q12. C'est le principe de la relativité restreinte d'Einstein qui stipule (par exemple) :

- qu'il n'est pas possible de détecter son état de mouvement par une expérience *interne* de physique (c'est-à-dire sans référence à un référentiel extérieur) dans un référentiel galiléen.
- et que la vitesse de la lumière est une constante dans tous les référentiels galiléens

Q13. On suppose pour simplifier que la source envoie des tops très courts tous les intervalles de temps de durée T_p mesurés dans un référentiel où la source est au repos. Pour un observateur O placé dans un référentiel qui voit la source S en mouve-

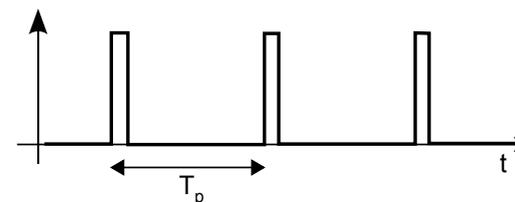


FIGURE 2 – Série de tops signaux

ment à la vitesse v en direction de O , on note la date $t_{e,1} = 0$ lorsque la source envoie un premier top.

L'onde se propageant à la vitesse c , ce top est reçu par O à la date

$$t_{r,1} = \frac{d_1}{c}$$

où d_1 correspond à la distance SO au moment de l'émission du top.

L'onde émet alors le second top à la date $t_{e,2} = T_p$ et celui-ci est reçu par l'observateur à la date

$$t_{r,2} = T_p + \frac{d_2}{c}$$

où d_2 correspond à la distance SO au moment de l'émission du second top.

On peut résumer ce scénario dans un diagramme d'espace-temps

La période apparente mesurée par l'observateur est par définition

$$T'_p = t_{r,2} - t_{r,1} = T_p + \frac{1}{c}(d_2 - d_1)$$

Or d_1 et d_2 sont liés par la relation $d_1 = d_2 + vT_p$, d'où

$$T'_p = T_p \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Q14. Si $v > 0$ alors $T'_p < T_p$ soit en terme de fréquence $f_p < f'_p$. La fréquence apparente est donc plus élevée que la fréquence propre et inversement si $v < 0$. Ce comportement est bien en accord avec l'effet Doppler ou Doppler-Fizeau mentionné dans l'introduction.

Q15. On suppose à présent que la source ne se déplace pas en direction de l'observateur. Le raisonnement établi plus haut s'applique en prenant la composante de la vitesse en direction de O , soit $v_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est un vecteur unitaire dirigé de la source

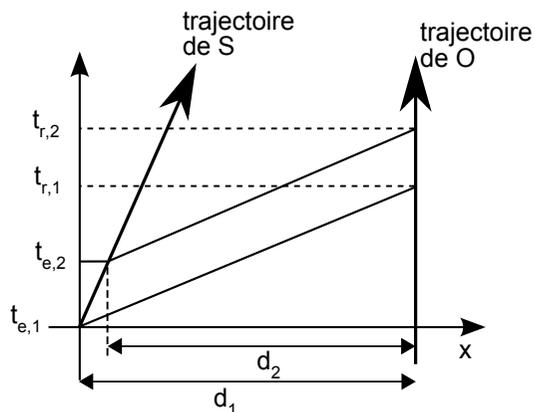


FIGURE 3 – Diagramme espace-temps pour l'effet Doppler-Fizeau

vers l'observateur.

On a alors

$$T'_p = T_p \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = T_p \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c}\right)$$

soit

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c}$$

En terme de longueur d'onde, puisque $\lambda = cT_p$ on en déduit que

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c}$$

Q16. Le pulsar possédant un compagnon, il est en rotation autour du centre d'inertie du système binaire et passe ainsi successivement d'une phase où il se rapproche de l'observateur (fréquence plus élevée) d'une phase où il s'en éloigne (fréquence plus basse) et ceci suivant la période orbitale du pulsar.

A.2.2 Mise en œuvre d'une activité expérimentale en classe de terminale S

Q17. Questions :

- Les élèves ont étudié des spectres atomiques d'émission et d'absorption. Il s'agit ici d'un spectre d'absorption de la lumière émise par le « coeur » du Soleil, par les atomes constituant le gaz de la couronne solaire. Cette lumière est reçue par la planète Jupiter qui constitue une source secondaire pour l'observateur terrestre.
- On peut réaliser la projection d'un spectre avec un réseau et une lampe à vapeur de mercure par exemple. La connaissance de la longueur d'onde des

raies permet d'étalonner la surface de projection avec les raies d'ordre 1 par exemple. On peut montrer la proportionnalité entre la longueur d'onde et la déviation angulaire, donc entre la longueur d'onde et la déviation mesurée sur l'écran. Pour faire comprendre aux élèves qu'on dispose d'un moyen de mesurer une longueur d'onde par étalonnage de l'écran on peut, en conservant les mêmes réglages, réaliser le spectre d'une lampe à vapeur de sodium et discuter de la précision de la mesure. L'analogie est celle du principe de l'étalonnage de l'image photographique au moyen de raies connues. La différence se joue sur le fait que les raies du sodium sont des raies d'absorption et non pas d'émission, mais cela ne change rien à la méthode de mesure.

- Les points de l'équateur de la planète Jupiter qui s'éloignent de l'observateur (en considérant comme fixe le centre de la planète au moment de l'observation) émettent une lumière qui sera perçue comme « décalée vers le rouge » du fait de l'effet Doppler-Fizeau. La photographie du spectre montre, grâce aux raies de référence, que les longueurs d'onde croissent vers la droite. Le bord « fuyant » de la planète pour un observateur terrestre émet donc la lumière reçue par le bord haut de l'image du spectre.
- C'est le référentiel jupitérocentrique.
- L'écart de longueur d'onde est mesuré entre deux points qui ont un mouvement antagoniste vis à vis de l'observateur, l'un se rapproche et l'autre s'éloigne, on cumule donc deux écarts quand on compare l'information lumineuse *émise* par ces deux points source *A* et *B*, cela justifie un facteur 2. Pour justifier le facteur 4, il faut comprendre que Jupiter est une *source secondaire*, les points *A* et *B* ont des mouvements antagonistes lorsqu'ils reçoivent la lumière du Soleil. Ce sont des récepteurs antagonistes en mouvement, il y a donc un décalage de longueur d'onde concernant le signal lumineux *reçu* par ces deux points. Les deux effets se cumulent car la Terre est placée entre Jupiter et le Soleil pour que l'observation soit possible. Par contre il n'est pas certain que les centres des trois astres soient alignés au moment de l'observation, or c'est l'hypothèse qui est faite pour justifier le facteur 4.
- Vitesse radiale de Jupiter

• Détermination de la vitesse équatoriale à partir des documents :

On ne connaît pas ici les causes d'erreurs liées au dispositif utilisé. On fait donc l'hypothèse que la seule source d'erreur est celle de la lecture de l'écart en longueur d'onde, dû à l'inclinaison de la raie du sodium, mesuré en pixels entre les deux bords du spectre. On fait le choix d'estimer l'incertitude sur la différence de longueur d'onde à 1 pixel (comme il s'agit d'un double repérage, une incertitude égale à 1 pixel sur chaque repérage entraîne une incertitude-type sur la différence égale à $1 \times \sqrt{2}/\sqrt{3}$ pixel, soit 0,8 pixel, ce que l'on « élargit » à la valeur entière la plus proche).

La soustraction des deux abscisses donne 8 pixels, ceci pour la raie Na_2 . En utilisant l'étalonnage de l'écran on peut encadrer $\Delta\lambda$ entre 0,0879 et

0,1131 nm et la vitesse radiale V_e calculée est ainsi comprise entre 11,2 et 14,4 km/s dans le référentiel « jupiterocentrique ».

- **Les élèves peuvent entreprendre une comparaison avec la valeur de référence de la période :** la période de rotation de Jupiter indiquée dans les données est de 9,92 heures, pour un diamètre équatorial de $1,43 \cdot 10^5$ km dans le référentiel « jupiterocentrique ». La période de rotation que l'on peut calculer à partir des mesures effectuées est alors comprise entre 8,67 h et 11,1 h. La valeur de référence se situe dans l'intervalle. Les hypothèses faites pour exploiter l'image permettent d'obtenir une estimation de la période de rotation avec un écart d'environ 10 %.

Q18. *Critères retenus pour évaluer :*

La question est notée sur 10 points.

On entreprend d'abord une lecture complète de la production en ayant tout d'abord pour unique objectif d'apprécier le niveau d'expertise pédagogique du candidat.

- 1 On attribue une première note sur 5 points de manière binaire (5 ou 0) :*
 - *5 points si la description de la séance fournit des éléments de mise en oeuvre suffisamment précis et réalistes d'une séance de niveau TS, pour permettre à un enseignant qui en prendrait connaissance de la réaliser facilement en l'adaptant à son contexte de travail.*
 - *0 point si ce n'est pas le cas.*
- 2 On attribue ensuite une deuxième note sur cinq points en attribuant un point ou zéro en fonction de la réussite ou non de chacun des critères suivants :*
 - *Présence d'éléments précisant l'organisation et l'environnement matériel*
 - *Description de tâches visant la prise en main du logiciel*
 - *Description de tâches visant à faire comprendre aux élèves la position dans l'espace des différents éléments du dispositif (positions comparées du Soleil, de Jupiter de la Terre et de la fente)*
 - *Indications précises sur les hypothèses de travail (données, documents, prérequis...)*
 - *Questionnement pertinent assorti de réponses exactes.*

Voici un exemple possible de production :

- **Environnement matériel :**

- Salle de TP avec ordinateurs.
- Paillasse du professeur équipée d'un dispositif dispersif muni d'une fente et d'un réseau, permettant d'observer le spectre d'émission d'une lampe spectrale.

- **Organisation :**

Les élèves travaillent par petits groupes (de 2 à 4) avec un ordinateur à disposition et le logiciel Salsaj. Après quelques tâches guidées permettant l'appropriation du logiciel (trente minutes) et du dispositif (15 minutes), ils travailleront ensuite en autonomie, le professeur apportant de l'aide ponctuellement.

- **Tâches demandées et réponses attendues :**

- Dans une première partie, on prévoit de familiariser les élèves avec le logiciel Salsaj. Les élèves doivent repérer les commandes du logiciel qui vont permettre de faire une coupe de spectre et de réaliser l'étalonnage de l'image. Une photographie d'un spectre d'émission réalisé au laboratoire du lycée à partir d'une lampe spectrale peut permettre aux élèves de s'exercer. Ils doivent comprendre la nécessité de connaître au moins deux longueurs d'ondes assez espacées pour étalonner le spectre avec une précision convenable si on souhaite procéder à des mesures ultérieures avec le même dispositif.
- Dans une seconde partie on fera réfléchir les élèves sur la situation observée à partir des éléments du document 2. l'expérience montée sur la paillasse montrant un spectre d'émission doit leur permettre de se représenter la situation réelle étudiée et notamment la corrélation entre la position dans l'espace de la fente et celle des raies. Pour s'assurer de l'appropriation de la situation par les élèves on peut leur demander de réaliser un schéma montrant la position du Soleil, la position de la Terre et celle de Jupiter pour qu'une observation de la lumière issue de Jupiter soit possible.
- Le document 2 sera complété par un autre document montrant un spectre de la lumière solaire observé directement et quelques explications (rappels de ce qui a été vu en classe de première) sur le processus d'absorption de la lumière émise par le coeur de l'étoile par les couches les plus externes.
- La proportionnalité entre la déviation des raies et leur longueur d'onde sera posée pour les élèves comme une propriété du réseau qu'on ne cherchera pas à établir. De même qu'on ne demandera pas de justification du facteur 4 apparaissant dans la relation donnant la vitesse radiale.
- À partir de cet ensemble de documents, et après avoir vérifié leur appropriation de la situation on pose aux élèves les questions suivantes qu'ils résoudront en autonomie :
 - Dans l'espace, où sont les atomes de sodium responsables des raies visibles sur le spectre? Réponse question Q17 (a)
 - D'après vos connaissances sur l'effet Doppler-Fizeau, identifier sur le spectre quels sont les points de la planète qui s'approchent de l'observateur terrestre et quels sont ceux qui s'en éloignent. Réponse question Q17 (c)
 - Après avoir étalonné le spectre au moyen du logiciel Salsaj, déterminer la vitesse radiale de Jupiter en utilisant la relation donnée dans le document. La réponse sera donnée par un encadrement et comparée à une valeur connue. Réponse question Q17 (f).

A.3 Caractéristiques du système binaire

A.3.1 Transformation du problème à deux corps en problème à un corps

Q19. Commentaires :

- on peut assimiler les étoiles à des points matériels car leurs dimensions (~ 10 km) sont très faibles au regard des distances qui les séparent ($\sim 10^6$ km).
- de plus on peut supposer le système isolé car la distance moyenne entre deux étoiles (ou deux systèmes d'étoiles) est très grande comparativement à la distance qui sépare les étoiles du système binaire (~ 1 al $\sim 10^{13}$ km).

Q20. La force de gravitation de Newton qui s'exerce sur les deux particules P_1 et P_2 de masses respectives m_1 et m_2 s'écrit :

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{2 \rightarrow 1}$$

où r_{12} est la distance de P_1 à P_2 et $\mathbf{u}_{2 \rightarrow 1}$ un vecteur unitaire dirigé de 2 vers 1.

Q21. Le centre de masse G du système est défini par référence à un point O par la relation

$$(m_1 + m_2) \mathbf{OG} = m_1 \mathbf{OP}_1 + m_2 \mathbf{OP}_2$$

dans le cas particulier où ce point O est justement le point G on obtient simplement

$$m_1 \mathbf{GP}_1 + m_2 \mathbf{GP}_2 = \mathbf{0}$$

On appelle référentiel du centre de masse (noté \mathcal{R}^*) un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen et centré sur G .

Le système binaire étant isolé l'application du théorème du centre d'inertie à l'ensemble donne

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \mathbf{OG}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

car il n'y a pas de forces extérieures qui s'exercent sur le système.

Après intégration on obtient

$$\frac{d\mathbf{OG}}{dt} = \mathbf{c}^{\text{ste}}$$

ce qui indique que G a un mouvement de translation rectiligne uniforme. On en déduit que \mathcal{R}^* est aussi galiléen.

Q22. Celui-ci constitue donc un « bon » référentiel dans la mesure où on peut choisir ce référentiel pour appliquer la relation fondamentale de la dynamique.

Q23. particule fictive :

(a) On applique le principe fondamental de la dynamique à chaque particule

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{F} & (1) \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F} & (2) \end{cases}$$

On combine les deux équations de la façon suivante

$$\frac{(1)}{m_1} - \frac{(2)}{m_2}$$

On obtient alors en posant $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

où on a posé

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Le problème se ramène donc à l'étude d'une particule fictive (notée P) repérée par le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{GP} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$ de masse μ appelée masse réduite et obéissant à l'équation dynamique précédente.

(b) Par définition du centre de masse on a avec les nouvelles notations

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$$

comme par ailleurs $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ on en déduit

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{cases}$$

en posant $\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ on trouve que la trajectoire de la particule (1) (respectivement (2)) se déduit de celle de la particule fictive P par une homothétie de centre G et de rapport $\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ (respectivement $1 - \eta = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}$).

Q24. Énergie et moment cinétique

(a) Par définition l'énergie mécanique est la somme des énergies cinétiques et potentielles soit

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

D'après les relations exprimant \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 en fonction de \mathbf{r} on a $\mathbf{v}_1 = \eta \mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_2 = (1 - \eta) \mathbf{v}$ où \mathbf{v} est la vitesse de la particule fictive. L'énergie cinétique devient

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 \eta^2 + m_2 (1 - \eta)^2) \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2$$

donc

$$E = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 - \frac{k}{r}$$

avec $k = G m_1 m_2$.

(b) Le moment cinétique total est par définition égal à la somme des moments cinétiques de chaque particule, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{r}_1 \wedge m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge m_2 \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{r}_1 \wedge m_1 \eta \mathbf{v} + \mathbf{r}_2 \wedge m_2 (1 - \eta) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{r}_1 \wedge \mu \mathbf{v} - \mathbf{r}_2 \wedge \mu \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mu \mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge \mu \mathbf{v}\end{aligned}$$

A.3.2 Paramètres orbitaux

Q25. Énoncé des 3 lois de Kepler :

- les planètes tournent autour du Soleil suivant des trajectoires elliptiques dont il occupe l'un des foyers.
- le rayon vecteur des planètes balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux
- le rapport du cube du demi-grand axe des trajectoires elliptiques des planètes sur le carré des temps mis pour qu'elles effectuent une révolution, est une constante pour le système solaire.

Kepler se situe dans la continuité de Copernic dont il reprend la thèse héliocentrique. Comme assistant de Tycho Brahe (le plus grand observateur de son temps), il exploite les données de ce dernier pour établir les 3 lois rappelées plus haut. Sa démarche est purement empirique puisqu'il ne dispose pas à son époque (début XVII^{ème}) de « lois » permettant d'établir ces relations¹. C'est Newton plus d'un demi-siècle plus tard qui parviendra le premier à les démontrer suivant les principes de la mécanique qu'il aura lui-même établi.

Q26. Le moment cinétique total L est constant ce qui signifie que \mathbf{r} est toujours perpendiculaire à la direction de \mathbf{L} et donc que le mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à \mathbf{L} .

Q27. Deuxième loi de Kepler

(a) En coordonnées polaires la vitesse s'écrit : $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$ donc

$$\mathbf{L} = r \hat{\mathbf{e}}_r \wedge \mu (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_z$$

avec $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_r \wedge \hat{\mathbf{e}}_\theta$.

Géométriquement $dA = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\| dt$ correspond à l'aire balayée par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps dt . Or $\|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{L}\| / \mu = c^{ste}$, on en déduit que

$$\frac{dA}{dt} = c^{ste}$$

c'est la loi des aires ou 2^{ème} loi de Kepler.

1. La notion de « lois » mathématiques n'apparaîtra en définitive qu'à la suite des travaux de Galilée, Descartes et Newton parmi tant d'autres.

(b) On pose $C = \frac{L}{\mu} = 2 \frac{dA}{dt}$ donc la vitesse aréolaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

On peut d'autre part évaluer la vitesse aréolaire en prenant l'aire balayée pendant une période de révolution soit

$$\frac{\pi ab}{T}$$

où πab correspond à l'aire de l'ellipse. Ce qui donne

$$C = \frac{2\pi ab}{T}$$

Q28. Pour un mouvement circulaire l'accélération est purement centripète et s'écrit :

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_r$$

en remplaçant dans l'équation dynamique de la particule fictive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \frac{GmM}{R^2} (-\hat{\mathbf{e}}_r)$$

on obtient

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

Comme le mouvement est circulaire uniforme le module de la vitesse peut s'écrire

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

On en déduit que

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Q29. Éléments de l'orbite

(a) Le vecteur \mathbf{u} de la direction de l'observateur a pour composantes dans le repère $(Fxyz)$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin i \\ \cos i \end{pmatrix}$$

tandis que la vitesse du pulsar s'écrit dans le même repère

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

le produit scalaire donne

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\sin i (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta)$$

En utilisant la loi des aires : $r^2 \dot{\theta} = C$ on obtient l'expression de la composante orthoradiale

$$v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{C}{r}$$

À partir de l'équation de l'ellipse

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

qui donne par dérivation par rapport au temps

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{e}{p} \dot{\theta} \sin \theta$$

on obtient la vitesse radiale

$$v_r = \dot{r} = \frac{e}{p} r^2 \dot{\theta} \sin \theta = \frac{e}{p} C \sin \theta$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -\frac{C}{p} \sin i [(e \sin \theta) \sin \theta - (1 + e \cos \theta) \cos \theta] \\ &= -\frac{C}{p} \sin i (e + \cos \theta) \end{aligned}$$

(b) D'après l'expression de $p = C^2/GM$ on a

$$K = \frac{GM}{C} \sin i$$

La 3^{ème} loi de Kepler donne pour le produit GM

$$GM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

et la constante des aires

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}$$

où on a remplacé le demi-petit axe b par son expression en fonction du demi-grand axe a et de l'excentricité e .

En remplaçant on trouve

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{T \sqrt{1 - e^2}}$$

(c) La vitesse radiale $V_{\text{rad}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_1 = \eta \mathbf{v}$ ce qui donne

$$V_{\text{rad}} = \eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = K \eta [e + \cos \theta]$$

En posant $K_1 = K \eta$ on trouve pour K_1

$$K_1 = \frac{2\pi \eta a \sin i}{T \sqrt{1 - e^2}}$$

Comme l'orbite de la particule (1) est déduite de la particule fictive par l'homothétie de centre G et de rapport η il s'agit aussi d'une ellipse de demi-grand axe $a_1 = \eta a$. D'où l'expression de K_1

$$K_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{T \sqrt{1 - e^2}}$$

Q30. Analyse du graphe donné par Hulse et Taylor.

(a) On retrouve qu'au périastre la vitesse est d'autant plus grande que la durée de transit dans cette région est courte conformément à la deuxième loi de Kepler. L'asymétrie de la figure est bien évidemment liée à l'excentricité de l'orbite; pour une trajectoire circulaire on aurait une simple sinusoïde.

(b) On a

$$\begin{aligned} V_{\text{min}} &= -K_1 (1 + e) \\ V_{\text{max}} &= K_1 (1 - e) \end{aligned}$$

d'où on tire

$$K_1 = \frac{V_{\text{max}} - V_{\text{min}}}{2}$$

On mesure alors sur le graphe $V_{\text{max}} = +80 \text{ km.s}^{-1}$ et $V_{\text{min}} = -330 \text{ km.s}^{-1}$ ce qui donne $K_1 = 205 \text{ km.s}^{-1}$.

(c) De V_{min} et V_{max} on tire l'excentricité

$$e = \frac{V_{\text{min}} + V_{\text{max}}}{V_{\text{min}} - V_{\text{max}}} = 0,61$$

De K_1 on tire le produit $a_1 \sin i$

$$a_1 \sin i = \frac{K_1 T_b \sqrt{1 - e^2}}{2\pi} = \frac{2,05 \cdot 10^5 \times 2,79 \cdot 10^4}{2\pi} \sqrt{1 - (0,61)^2} = 7,2 \cdot 10^8 \text{ m}$$

où on a pris $T_b = 7 \text{ h } 45 \text{ mn} = 7 \times 3600 + 45 \times 60 = 2,79 \cdot 10^4 \text{ s}$

Q31. Détermination des masses

(a) À partir de l'équation donnant K_1 on tire

$$(\sin i)^3 = \frac{K_1^3 T_b^3 (1 - e^2)^{3/2}}{(2\pi)^3 a_1^3}$$

D'après la troisième loi de Kepler

$$\frac{T_b^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

comme de plus $a = a_1/\eta$. Soit

$$f = \frac{m_2^3 K_1^3 T_b}{M^2 (2\pi)^3 \eta^{-3} GM} (1 - e^2)^{3/2}$$

avec $\eta^3 = m_2^3/M^3$ on obtient finalement

$$f = \frac{T_b}{2\pi G} K_1^3 (1 - e^2)^{3/2}$$

(b) Application numérique :

$$f = 2,85 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

soit $f = 0,14 M_\odot$

(c) On donne $i = 46^\circ$ avec l'hypothèse que $m_1 = m_2 \equiv m$ on obtient

$$m = \frac{4f}{(\sin i)^3} = 1,5 M_\odot$$

A.4 Ondes gravitationnelles

A.4.1 Pertes par rayonnement

Q32. Mouvement circulaire

(a) On a vu que le moment cinétique du système avait pour expression $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mu \mathbf{v}$ soit pour un mouvement circulaire : $L = \mu R v$ et la vitesse est liée à la pulsation ω par $v = R\omega$. Les masses étant supposées égales, la masse réduite $\mu = m/2$. D'où

$$L = \frac{m}{2} R^2 \omega$$

(b) L'énergie a pour expression

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{Gm_1 m_2}{R} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{Gm^2}{R}$$

Par ailleurs l'accélération étant purement centripète on a pour un mouvement circulaire

$$\mu \mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow -\mu \frac{v^2}{R} = -\frac{Gm^2}{R^2}$$

ce qui donne en remplaçant μv^2 dans l'expression de l'énergie

$$E = -\frac{Gm^2}{2R}$$

(c) On utilise de nouveau la relation qui lie l'accélération centripète et la force en notant que $\mu = m/2$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{Gm^2}{R}$$

avec $v = \frac{2\pi R}{T}$ pour un mouvement circulaire uniforme.

On retrouve alors sous une forme particulière la 3ème loi de Kepler

$$R = \left(\frac{Gm}{2\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

d'où l'énergie totale

$$E = -\frac{Gm^2}{2R} = -\frac{Gm^2}{2} \left(\frac{Gm}{2\pi^2} \right)^{-1/3} T_b^{-2/3}$$

Q33. Mouvement avec perte par rayonnement

- (a) On identifie la perte d'énergie au rayonnement d'onde gravitationnelle $\frac{dE}{dt} = -P_r$
- (b) D'après les questions précédentes on obtient l'énergie E en fonction de la période orbitale T

$$E = -\frac{Gm^2}{2} \left(\frac{Gm}{2\pi^2} \right)^{-1/3} T^{-2/3}$$

donc en supposant la période lentement variable dans le temps

$$\frac{dE}{dt} = +\frac{2}{3} \frac{Gm^2}{2} \left(\frac{Gm}{2\pi^2} \right)^{-1/3} T^{-5/3} \frac{dT}{dt}$$

(c) La puissance rayonnée est donnée par

$$P_r = \frac{32G}{5c^5} L^2 \omega^4 = \frac{32G}{5c^5} \left(\frac{m}{2}\right)^2 R^4 \omega^6$$

soit

$$P_r = \frac{8}{5} \frac{Gm^2}{c^5} \left(\frac{Gm}{2\pi^2}\right)^{4/3} T^{8/3} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^6$$

On obtient

$$\frac{Gm^2}{3} \left(\frac{Gm}{2\pi^2}\right)^{-1/3} T^{-5/3} \frac{dT}{dt} = -\frac{8}{5} \frac{Gm^2}{c^5} \left(\frac{Gm}{2\pi^2}\right)^{4/3} T^{-10/3} (2\pi)^6$$

soit

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{384}{5} \frac{\pi^2 (2\pi^2)^{1/3}}{c^5} \left(\frac{Gm}{T}\right)^{5/3} = -2,05 \cdot 10^3 \frac{1}{c^5} \left(\frac{Gm}{T}\right)^{5/3}$$

(d) Application numérique : $m = 1,4 \times 2,10^{30} = 2,8 \cdot 10^{30}$ kg et $T = 2,79 \cdot 10^4$ s

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2,05 \cdot 10^3}{(3 \cdot 10^8)^5} \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 2,8 \cdot 10^{30}}{2,79 \cdot 10^4}\right)^{5/3} = 2,01 \cdot 10^{-13}$$

On constate que $\dot{P}_b = \dot{P}_{bm}/10$. L'écart s'explique par le fait que l'on n'a pas tenu compte de l'excentricité de l'orbite.

A.4.2 Test du modèle

Q34. Remarquons tout d'abord que \dot{P}_b étant très faible, l'instant t_k de la $k^{\text{ème}}$ révolution, s'écrit à l'ordre zéro

$$t_k \simeq kT_0$$

La durée de la $k^{\text{ème}}$ révolution s'écrit donc

$$T_k \simeq T_0 - \dot{P}_b k T_0$$

et le décalage sur la $k^{\text{ème}}$ période

$$\delta T_k = T_k - T_0 = -\dot{P}_b k T_0$$

Le décalage cumulé sur N période devient alors

$$\Delta t = \sum_{k=1}^N \delta T_k = -\dot{P}_b T_0 \sum_{k=1}^N k = -\dot{P}_b T_0 \frac{N(N-1)}{2}$$

soit en supposant N grand

$$\Delta t \simeq -\dot{P}_b T_0 \frac{N^2}{2}$$

et comme N est relié à l'instant d'observation par $t \simeq NT_0$ on retrouve bien la relation

$$\Delta t = -\frac{\dot{P}_b}{2} \frac{t^2}{T_0}$$

Q35. L'allure du graphe semble bien de type parabolique comme l'indique la formule du « décalage cumulé de la période » établie ci-dessus. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'en prenant l'origine des temps à l'année 1975 on retrouve des points situés au voisinage de la courbe de tendance.

• en 1985 soit $t = 10$ ans = $10 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 3,156 \cdot 10^8$ s

$$\Delta t = -\frac{2,4 \cdot 10^{-12}}{2} \frac{(3,156 \cdot 10^8)^2}{2,790 \cdot 10^4} = -4,3 \text{ s}$$

avec $T_0 = 7 \text{ h } 45 \text{ mn} = 7,75 \text{ h} = 2,790 \cdot 10^4$ s

• en 2005 soit $t = 30$ ans

$$\Delta t = -3^2 \times 4,3 = -39 \text{ s}$$

ce qui valide l'analyse de la perte d'énergie par rayonnement gravitationnel.

B Détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

Q36. Lecture du document :

- C'est une cavité délimitée par deux miroirs permettant à la lumière d'effectuer un grand nombre d'aller-retour. On parle à son propos d'interférences à N ondes.
- Si la finesse de la cavité est élevée cela signifie que les coefficients de réflexion des miroirs du FP sont proche de 1, ce qui signifie que le nombre d'aller-retour avant un amortissement significatif de l'amplitude de l'onde sera important ce qui explique l'allongement de la longueur des bras du Michelson de 3 à 100 km.
- On entend par source laser stable, un laser qui produit un faisceau dont l'intensité lumineuse ne varie pas au cours du temps. En effet puisque la sensibilité de l'appareil dépend de la puissance du laser il faut que celle-ci ne varie pas dans le temps de façon à ne pas rajouter de « bruit » au signal utile.

Q37. Si l'onde incidente a une amplitude E_0 avant de frapper la séparatrice, on obtiendra

- en suivant le chemin Ox : $E_1 = E_0 t_s r_1 r'_s e^{i(\omega t - 2kL_x)}$
 - en suivant le chemin Oy : $E_2 = E_0 r_s r_2 t_s e^{i(\omega t - 2kL_y)}$
- d'où une amplitude en sortie

$$\begin{aligned} E_{out} &= E_1 + E_2 \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (-1) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2kL_x} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-1) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i2kL_y} \right] \\ &= \frac{E_0}{2} e^{i(\omega t - k(L_x + L_y))} \left[e^{ik(L_x - L_y)} - e^{-ik(L_x - L_y)} \right] \end{aligned}$$

soit en posant $\Delta L = L_x - L_y$ et $L_x + L_y = 2L$

$$E_{out} = iE_0 e^{i(\omega t - 2kL)} \frac{[e^{ik\Delta L} - e^{-ik\Delta L}]}{2i}$$

soit

$$E_{out} = iE_0 e^{i(\omega t - 2kL)} \sin(k\Delta L)$$

Q38. La puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude, soit $P_{in} = K |E_{in}|^2 = K |E_0|^2$ et $P_{out} = K |E_{out}|^2 = K |E_0|^2 \sin^2(k\Delta L)$. Ce qui donne

$$P_{out} = P_{in} \sin^2(k\Delta L)$$

Q39. Le même calcul avec L_x (resp. L_y) qui devient $L_x + \delta L_x$ (resp. $L_y + \delta L_y$) donne

$$\begin{aligned} E_{out} &= iE_i e^{i(\omega t - 2kL)} \sin(k\Delta L + k(\delta L_x - \delta L_y)) \\ &= iE_i e^{i(\omega t - 2kL)} \sin\left(k\Delta L + k\frac{h}{2}(L_x + L_y)\right) \\ &= iE_i e^{i(\omega t - 2kL)} \sin(k\Delta L + khL) \end{aligned}$$

d'où une puissance

$$P_{out} = P_{in} \sin^2(k\Delta L + khL)$$

puisque $khL \ll 1$ on peut faire un développement limité au 1er ordre

$$P_{out} \simeq P_{in} \sin^2(k\Delta L) + P_{in} khL \left. \frac{\partial}{\partial u} \sin^2 u \right|_{u=k\Delta L} + \dots$$

Le premier terme correspond à la puissance en l'absence de la perturbation

$$P_{dc} = P_{in} \sin^2(k\Delta L)$$

tandis que le terme suivant correspond à la puissance lumineuse en sortie de l'interféromètre associé à la perturbation de l'onde, soit

$$\delta P_{grav} = P_{in} khL \times 2 \sin(k\Delta L) \cos(k\Delta L)$$

On retrouve l'expression demandée

$$\delta P_{grav} = P_{in} khL \sin(2k\Delta L)$$

On constate que le signal détecté est bien

- proportionnel à la grandeur physique recherchée : h
- proportionnel à la longueur des bras L (plus les bras sont plus le détecteur est sensible)
- proportionnel à la puissance du laser utilisé.

Q40. δP_{grav} sera maximal si le sinus est maximal ce qui correspond à la relation : $2k\Delta L = \frac{\pi}{2} + n\pi$. On en déduit que

$$P_{dc} = P_{in} \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{P_{in}}{2}$$

Le rapport du signal utile sur le signal continu donne avec les données du document 4 ($\lambda \simeq 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$, $h \sim 10^{-21}$ et $L \sim 100 \text{km} = 10^5 \text{m}$)

$$\frac{\delta P_{grav}}{P_{dc}} = 2khL = \frac{4\pi}{\lambda} hL = \frac{4\pi}{10^{-6}} 10^{-21} \times 10^5 \simeq 10^{-9}$$

Le signal utile est très faible en regard de la puissance du laser. En se plaçant sur une frange sombre on cherche à éliminer le signal de fond

Q41. On se place donc sur une frange sombre : $k\Delta L = n\pi$ où $n \in \mathbb{N}$. Dans ces conditions non seulement $P_{dc} = 0$ mais aussi le terme du premier ordre dans le développement limité. En reprenant l'expression exacte de P_{out} on obtient

$$P_{out} = P_{in} \sin^2(n\pi + khL) = P_{in} \sin^2(khL) \simeq P_{in} (khL)^2$$

On trouve bien un signal utile proportionnel à h^2 qui compte tenu de la très faible valeur de h rend le signal utile bien trop faible pour être détecté.