Maths et Astronomie
**5. Calendriers**

**SOLUTIONS**
**COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT**
**À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS**
**COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE**

## SOLUTIONS

### Exercice 1

**a.** 12 lunaisons entières + 11 jours (365 = 12×29,5 + 11)
**b.** Plus courte de 11 jours.
**c.** L'excès est de 0,03 jour par lunaison. Sur 30 ans : 0,03 × 12 × 30 = 10,8.
Il faut donc ajouter 11 jours. On aura donc 11 années de 355 jours et 19 de 354 jours.
Une mesure plus précise de la lunaison donne 29,530588 jours. On trouve alors un écart de 11,01 jours très proche de 11 jours, ce qui justifie ce cycle de 30 ans.
**d.** Le nombre de jours écoulés est égal au nombre d'années multiplié par la durée d'une année.
Calcul en années solaires : (2000 – 622,5) x 365,24 = 503 118,1 jours
Calcul en années lunaires :
La durée d'une année lunaire du calendrier musulman est de 12 x 29,53 j soit 354,36 j .
Si n est le nombre d'années lunaires, on doit avoir n × 354,36 = 503 118,1 jours
d'où n = 503 118,1 / 354,36 = 1419,8.
L'Hégire étant le début de l'an 1.
1419,8 ans plus tard : 1420,8 soit courant de l'année 1420 (C'était précisément le 25/9/1420)

### Exercice 2

**a.** 19 années solaires = 19 × 365,2422 jours = 6939,6018 jours
235 lunaisons = 235 × 29,5306 jours = 6939,691 jours
L'écart est de 0,0892 jours soit environ 2 heures sur une période de 19 ans.
**b.** 19 années à 12 mois = 228 mois alors qu'il y a 235 lunaisons. Il manque donc 7 lunaisons.
Il faut donc 7 années de 13 mois et 12 années de 12 mois dans un cycle.
**c.** Après 19 années, les phases se retrouvent aux mêmes dates dans le calendrier (à un jour près).
Ce sera donc le 1er janvier 2014 (1995 + 19) puis le 1er janvier 2033 (2014 + 19). Par contre, en 2052 (2033 + 19), la nouvelle Lune aura lieu le 2 janvier. La correspondance n'est pas exacte mais surtout, en 19 années, le nombre d'années bissextiles peut être de 4 ou de 5 :
- il y a 5 années bissextiles entre 1995 et 2014 ainsi qu'entre 2014 et 2033 ;
- mais il n'y a que 4 années bissextiles entre 2033 et janvier 2052.

### Exercice 3

**1. a.** 0,2422 x 400 soit environ 97 jours ou une saison. Si le calendrier commençait en hiver une année donnée, elle commencera en automne 400 ans plus tard.
**b.** Il faut que le décalage soit de 365,2422 jours à raison de 0,2422 jour par an. On doit donc avoir 0,2422 x nombre d'années = 365,2422. On trouve environ 1500 ans.
**2. a.** 365,25 jours
**b.** 400 x (365,25 – 365,2422) = 400 x 0,0078 = 3,12 jours
**c.** Décalage : (1582 – 325) x 0,0078 ≈ 10 jours. L'équinoxe a lieu le 31 mars.
**3.** Par rapport au calendrier julien, sur 400 ans on a supprimé trois jours (trois années bissextiles qui deviennent communes) soit en moyenne 3/400 = 0,0075 jours.
La durée moyenne d'une année grégorienne est donc : 365,25 - 0,0075 = 365,2425 jours.
L'année grégorienne est donc plus logue que l'année tropique de 0,0003 jours soit 1 jour en 3000 ans environ.

## Exercice 4

**a.** 365 jours = 52 semaines + 1 jour.
**b.** Le 1er janvier 2012 sera un dimanche (samedi + 1 jour).
Le 1er janvier 2013 est un mardi (dimanche + 2 jours) car 2012 est bissextile.
**c.** Du 1er janvier 2011 au 1er janvier 2100, il s'écoulera 89 années dont 22 bissextiles (de 2012 à 2096 inclus) car (96 - 12)/4 + 1 = 21 + 1 = 22. Il y aura donc 67 années communes (89 - 22).
Ce qui donne en jours : 22×366 + 67 × 365 = 32 507 ; ce qui fait 4643 semaines et 6 jours.
Le 1er janvier 2100 sera un vendredi (samedi + 6 jours).
Le 1er janvier 2101 sera un samedi (vendredi + 1 jour), 2100 n'étant pas bissextile (voir la partie 3 sur le calendrier grégorien).
On peut vérifier ces jours en allant sur le site de l'IMCCE (imcce.fr) en cliquant sur l'onglet jours de la semaine.

## Exercice 5

**1.** Pour le 22 juillet 2009 à 2 h 30, le site de l'IMCCE donne JJ = 2 455 034,6
On ajoute la durée du Saros : 2 455 034,6 + 6 585,32 = 2 461 619,92.
On transforme le jour julien en date toujours sur le site de l'IMCCE et on trouve le 2 août 2027 à 10 h. Cette éclipse sera particulièrement longue (6 min 23 s) et visible depuis le Sud de l'Espagne.
**2. a.** Le 5 avril 1980 à 12 h : JJ1 = 2 444 335 ; Le 1er janvier 2012 : JJ2 = 2 455 928.
Âge en nombres de jours : JJ2 – JJ1 = 2 455 928 – 2 444 335 = 11 593 ;
**b.** En heures : 278 232 ; en minutes : 16 693 920 ; en secondes : 1 001 635 200
**c.** 51 ans en années vénusiennes ; 16 ans en années martiennes ; 2 ans en années joviennes ; 1 an en années saturniennes.

## COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT

Les périodes données ici ne sont pas forcément celles que vous connaissez. Tout dépend du repère choisi.

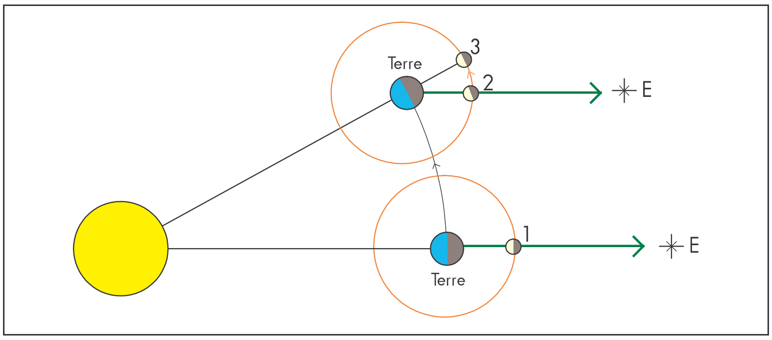
Le jour
Jour sidéral : il est mesuré par rapport aux étoiles et dure 23 h 56 min et 4 s.
Jour solaire : intervalle de temps entre deux midis solaires (passage du Soleil dans le plan du méridien). Il vaut en moyenne 24 h.
La différence entre les deux vient du fait que, pendant que la Terre tourne sur elle-même, elle tourne aussi autour du Soleil (voir le complément n°3 dans la partie Rotation).

La lunaison
La lunaison ou mois lunaire est l'intervalle entre deux pleines lunes ou deux nouvelles lunes. Sa durée moyenne est de 29,5306 jours soit 29 j 12 h 44 min 2,9s.
La période de révolution de la Lune autour de la Terre est de 27,3 jours seulement. Elle est mesurée par rapport aux étoiles.

En 1, c'est la pleine Lune.

De 1 à 2, la Lune a effectué une révolution autour de la Terre par rapport à l'étoile E. Il s'est écoulé 27,3 j.

Il faut encore 2,2 jours pour que la Lune se retrouve en 3, en position de pleine Lune. Il s'est donc écoulé 29,5 j entre les deux pleines lunes.




Le calcul précis peut se faire à partir de vitesses angulaires en prenant la Terre comme centre.
La vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre est de 1/27,3 tour/jour (par rapport aux étoiles)
La vitesse angulaire du Soleil autour de la Terre est de 1/365 tour/jour (par rapport aux étoiles)
La vitesse de la Lune autour de la Terre par rapport à la droite Terre Soleil est donc de 1/27,3 –1/365.
Si on appelle T la période correspondant, on a : 1/T = 1/27,3 –1/365. On trouve bien 29,5 jours pour T (le calcul est fait d'une autre manière dans l'exercice 10 de la partie Lune).

L'année

L'année des saisons ou année tropique est l'intervalle entre deux équinoxes de printemps ou deux solstices d'été... Sa durée moyenne est de 365,2422 jours ou 365 j 5 h 49 min.
On peut aussi définir l'année sidérale de 365,2564 jours ou 365 j 6 h 9 min. On la mesure par rapport aux étoiles. Elle diffère de l'année tropique à cause d'un lent mouvement de l'axe de la Terre qui décale les saisons par rapports aux étoiles (précession des équinoxes).

À propos des calendriers lunaires

On peut utiliser le calendrier des postes pour calculer la durée moyenne de la lunaison.
Pour plus de précision, on peut trouver l'heure précise des nouvelles (ou pleines) lunes sur le site de l'Institut de Mécanique Céleste (http://www.imcce.fr/).
On s'apercevra ainsi que toutes les lunaisons n'ont pas la même durée ; le mouvement de la Lune, attirée par la Terre et par le Soleil, est très complexe.

À propos des calendriers luni-solaires

Dans le calendrier chinois, le mois débute à la nouvelle lune. L'année débute ainsi entre le 21/1 et le 20/2.
Le calendrier juif est aussi luni-solaire.

À propos des calendriers solaires

En 46 avant notre ère, Jules César instaure le calendrier julien proposé par l'astronome Sosigène avec des années bissextiles tous les 4 ans. Le sixième jour avant les calendes de mars était doublé tous les 4 ans ; en latin, *bis sexto ante calendas martis*, ce qui a donné le mot de bissextile. On ajoute maintenant ce jour à la fin du mois de février.

A l'époque de Jules César, l'équinoxe de printemps avait lieu le 25 mars. Au 4$^{e}$ siècle, il tombe le 21 mars. On pense alors que Sosigène s'était trompé. En réalité, sur ces 4 jours de décalage, trois sont dus à cet écart de 0,0078 jour par an et un seul peut être attribué à une erreur de Sosigène. Le concile de Nicée, en 325, fixe la date de Pâques au premier dimanche suivant la pleine Lune suivant le 21 mars, date supposée de l'équinoxe de printemps.

En 1582, le pape Grégoire XIII réforme le calendrier ainsi :
1) 10 jours sont supprimés : le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre 1582.
2) Les années restent bissextiles tous les quatre ans à cette exception près : les années séculaires (se terminant par 00) sont communes (365 jours) sauf celles dont le nombre siècles est divisible par 4. Ainsi 1700, 1800, 1900 n'ont pas été bissextiles alors que 1600 et 2000 l'ont été.

Le calendrier grégorien a été adopté à différentes dates suivant les pays : Italie (octobre 1582), France et Pays-Bas (décembre 1582), Angleterre (1752), Japon (1873), URSS (1918).
Par exemple, la révolution d'octobre 1917 a eu lieu les 24-25 octobre 1917 du calendrier julien ou les 6-7 novembre du calendrier grégorien.

Le calendrier républicain a été instauré le 6 octobre 1793, le début de l'an I ayant été fixé au 22 septembre 1792. Il comporte 12 mois de 30 jours plus 5 ou 6 jours (dits sans-culottides puis complémentaires).
Chaque mois est partagé en 3 décades de 10 jours, chaque jour en 10 heures de 100 minutes, chacune comptant 100 secondes.

Le site de l'IMCCE permet en particulier de passer d'un calendrier à l'autre (Grégorien, julien copte, musulman, israélite).

Calendriers et fractions continues

L'écriture d'un nombre réel sous la forme d'une fraction simple (avec un numérateur et un dénominateur qui ne soient pas "trop grands") permet de résoudre un certain nombre de problèmes de calendriers. La technique du développement en fraction continue est décrite à la fin de ce fichier.

Prenons l'exemple du calendrier lunaire. Douze lunaisons valent 354,367 056 jours. Le développement en fraction continue permet d'avoir une bonne approximation de ce nombre sous la forme 10 631/30 soit 354 + 11/30. Si, à l'année de 354 jours, on ajoute 11 jours en 30 ans, on obtiendra une bonne approximation de nos 12 lunaisons. Il existe d'autres approximations comme 354 + 29/79 qui est un peu meilleure.

On peut déterminer le cycle de Méton avec cette méthode. L'année des saisons (ou année tropique) dure 365,242 199 jours et la lunaison 29,530 588 jours. Le quotient des deux donne 12,3682671 qui est le nombre de lunaisons par an. Le développement de ce nombre en fractions continues donne différentes approximation comme 136/11, 235/19, 4 131/334 … La deuxième solution correspond au cycle de Méton, 235 lunaisons pour 19 années.

Autre exemple, la répartition des années bissextiles. La durée de l'année tropique (365,242199 j) peut s'écrire 365 + 1/4 (calendrier julien) mais aussi 365 + 7/29 (ce qui signifie 7 années bissextiles tous les 29 ans), 365 + 8/33 ou encore 365 + 31/128. Cette dernière approximation, 31 années bissextiles sur un cycle de 128 ans, est meilleure que celle utilisée dans le calendrier grégorien mais elle est moins facile à mettre en œuvre.
Quoi qu'il en soit, il est inutile de cherche à faire un calendrier trop précis. La rotation de la Terre est ralentie par les forces de marées de la Lune et la durée de l'année se modifie.

## À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

### M&A CLEA Fractions continues

Une feuille de calcul qui donne les approximations rationnelles de 354,367056 (nombre de jours dans 12 lunaisons, pour trouver un cycle dans le nombre de jours par mois des calendriers lunaires), de 12,368267 (nombre de mois lunaires par an pour trouver un cycle pour ajouter le mois intercalaire dans les calendriers luni-solaires ou pour retrouver le cycle de Méton), 365,242199 (nombre de jours par année tropique pour trouver les meilleurs manières de placer les années bissextiles).

### M&A CLEA Calendriers

Un diaporama expliquant les trois types de calendrier (solaire, lunaire, luni-solaire)

## COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE : les fractions continues (voir la feuille de calcul)

Résultat à obtenir : $r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ ( relation $\boxed{1}$ )

### Calcul des coefficients

On choisit $a_0 = E(r)$. E signifie ici partie entière.

$\boxed{1}$ peut s'écrire (en soustrayant $a_0$ et en prenant l'inverse) : $\frac{1}{r - a_0} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$

On pose $\mathbf{b_0 = r - a_0}$ d'où $\frac{1}{b_0} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$ ( relation $\boxed{2}$ ). On choisit $\mathbf{a_1 = E(\frac{1}{b_0})}$

$\boxed{2}$ peut s'écrire (en soustrayant $a_1$ et en prenant l'inverse) : $\cfrac{1}{\frac{1}{b_0} - a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}$ ou $\frac{b_0}{1 - a_1 b_0} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}$

On pose $\mathbf{b_1 = 1 - a_1 b_0}$ d'où $\frac{b_0}{b_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}$ ( relation $\boxed{3}$ ). On choisit $\mathbf{a_2 = E(\frac{b_0}{b_1})}$

$\boxed{3}$ peut s'écrire (en soustrayant $a_2$ et en prenant l'inverse) : $\cfrac{1}{\frac{b_0}{b_1} - a_2} = a3 + \ldots$ ou $\frac{b_1}{b_0 - b_1 a_2} = a_3 + \ldots$

On pose $\mathbf{b_2 = b_0 - b_1 a_2}$ d'où $\frac{b_1}{b_2} = a_3 + \ldots$ ( relation $\boxed{4}$ ). On choisit $\mathbf{a_3 = E(\frac{b_1}{b_2})}$ etc.

On définit ainsi deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par récurrence : $\mathbf{a_i = E(\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}})}$ **et** $\mathbf{b_i = b_{i-2} - b_{i-1} \times a_i}$

On écrit $r = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$

### Réduites

La réduite de rang n est la fraction continue $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

Réduite de rang 0 : $\frac{a_0}{1}$

Réduite de rang 1 : $a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$

Réduite de rang 2 : $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$

Réduite de rang n : $\frac{h_n}{k_n} = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}}$

On démontre que la réduite $h_n/k_n$ est la meilleure approximation rationnelle du réel r de dénominateur inférieur ou égal à $k_n$.

### Exemple

Avec r = 354,367 056 (nombre de jours dans 12 lunaisons)

| i | $a_i$ | $b_i$ | | $h_i$ / $k_i$ | ou | $h'_i$ | | $k_i$ | $h_i/k_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 354 | 0,367056 | réduite d'ordre 0 : | 354 / 1 | ou | 354 | + | 0 / 1 | 354 |
| 1 | 2 | 0,265888 | réduite d'ordre 1 : | 709 / 2 | ou | 354 | + | 1 / 2 | 354,5 |
| 2 | 1 | 0,101168 | réduite d'ordre 2 : | 1063 / 3 | ou | 354 | + | 1 / 3 | 354,333333 |
| 3 | 2 | 0,063552 | réduite d'ordre 3 : | 2835 / 8 | ou | 354 | + | 3 / 8 | 354,375 |
| 4 | 1 | 0,037616 | réduite d'ordre 4 : | 3898 / 11 | ou | 354 | + | 4 / 11 | 354,363636 |
| 5 | 1 | 0,025936 | réduite d'ordre 5 : | 6733 / 19 | ou | 354 | + | 7 / 19 | 354,368421 |
| 6 | 1 | 0,011680 | réduite d'ordre 6 : | 10631 / 30 | ou | 354 | + | 11 / 30 | 354,366667 |
| 7 | 2 | 0,002576 | réduite d'ordre 7 : | 27995 / 79 | ou | 354 | + | 29 / 79 | 354,367089 |