



Maths et Astronomie

6. Éclipses de Lune

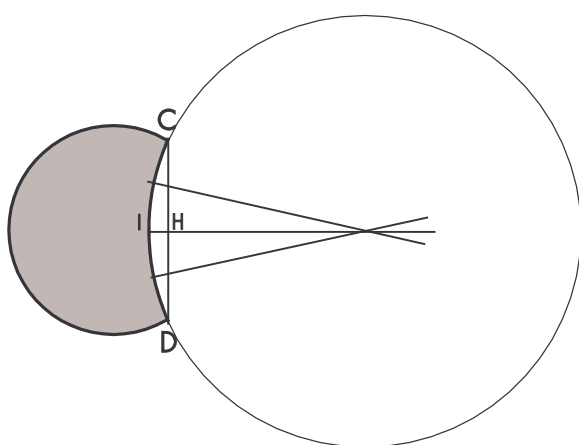
SOLUTIONS COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

SOLUTIONS

Partie 1

1. Quatre méthodes sont possibles pour retrouver le diamètre de l'ombre :

a. Méthode graphique :



On trace les médiatrices des cordes [CI] et [DI] qui se coupent au centre de l'ombre de la Terre.

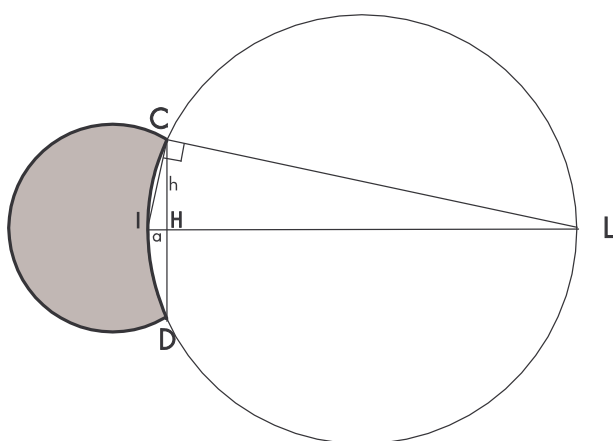
On obtient en mesurant sur la figure

D_O figure ≈ 164 mm

D_L figure ≈ 66 mm

d'où $D_O / D_L \approx 2,5$

b. Avec la trigonométrie. On pose $CH = h$ et $IH = a$



Les angles \widehat{ICH} et \widehat{ILC} ont même mesure (complémentaires de \widehat{CIL}) ou \widehat{ICD} et \widehat{ILD} sont deux angles inscrits interceptant le même arc.

$$\tan \widehat{ICH} = IH/CH = a/h$$

$$\tan \widehat{ILC} = CH/HL = h/HL$$

d'où :

$$a/h = h/HL \text{ donc } HL = h^2/a$$

$$\text{et } IL = a + h^2/a = (a^2 + h^2)/a$$

On mesure h et a :

$h \approx 33$ mm et $a \approx 7$ mm

d'où $IL \approx 162,5$ mm et $D_O / D_L \approx 2,46$

c. Avec les propriétés métriques dans le triangle rectangle

La relation $CI^2 = IH \times IL$ donne $a^2 + h^2 = a \times IL$ ou $IL = (a^2 + h^2)/a$, comme au b.

d. Méthode expérimentale : on trace sur un calque des cercles de différents rayons et on cherche celui qui se superpose le mieux à l'ombre de la Terre. On trouve là encore environ 82 mm de rayon.

2. a. Il suffit d'avoir l'échelle du dessin pour trouver le diamètre de la Lune :

$$\begin{array}{l} 164 \text{ mm} \rightarrow 12\,740 \text{ km} \\ \downarrow \text{: } 164 \\ 1 \text{ mm} \rightarrow 77,7 \text{ km (échelle environ } 1 / 77\,700\,000) \\ \downarrow \times 66 \\ 66 \text{ mm} \rightarrow 5\,100 \text{ km (au lieu de } 3\,500) \end{array}$$

Ce résultat est assez éloigné de la réalité mais donne un ordre de grandeur.

b. Pour obtenir maintenant la distance Terre - Lune que l'on notera r , on se sert de la mesure de son diamètre angulaire, $0,5^\circ$. On peut utiliser soit la trigonométrie, soit les proportions.

Avec la trigonométrie : $\tan 0,5^\circ = D_L / r$ d'où $r \approx 5100 / \tan 0,5^\circ \approx 580\,000 \text{ km}$

Avec les proportions :

$$\begin{array}{l} 0,5^\circ \rightarrow 5100 \text{ km} \quad (D_L) \\ \downarrow \times 720 \\ 360^\circ \rightarrow 3\,672\,000 \text{ km pour une circonférence} \end{array}$$

$$2\pi r \approx 3\,672\,000 \text{ km d'où } r \approx 580\,000 \text{ km}$$

Encore un bon ordre de grandeur, quoique assez éloigné de la distance réelle (400 000 km)

3. a. On a considéré (E_r) et (F_r') parallèles : $BG \approx EF = \text{Diamètre de la Terre } D_T$.

$$BG = BA + AG \text{ ou } D_T = D_O + D_L$$

$$\text{b. } D_O / D_L = 2,5 \text{ donc } D_O = 2,5 D_L$$

$$D_O + D_L = D_T = 12\,740$$

$$2,5 D_L + D_L = 12\,740 ; 3,5 D_L \approx 12\,740 \text{ d'où } D_L \approx 3\,640 \text{ km et } D_O = 9\,100 \text{ km}$$

(Le diamètre de la Lune est en réalité de 3 500 km)

c. Mêmes méthodes qu'à la question 2b mais avec $D_L \approx 3\,640 \text{ km}$

On obtient $r \approx 417\,000 \text{ km}$

Valeurs réelles :

Diamètre de la Lune : 3 476 km

Distance Terre Lune : de 356 000 à 407 000 km (moyenne : 384 000 km)

Partie 2 : le calcul des horaires d'une éclipse de Lune

On peut raccourcir l'activité en donnant le diamètre de l'ombre de la Terre. Il ne reste plus à faire que les questions c et d.

Tous les calculs sont sur le fichier M&A CLEA ELune Horaires.xls sur le CD

Solutions

a. Calcul de la longueur TP du cône d'ombre de la Terre

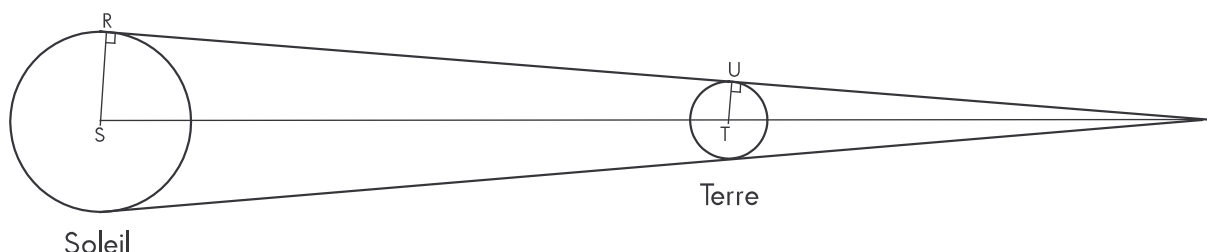


Figure 10

Le théorème de Thalès permet d'écrire : $\frac{TP}{SP} = \frac{TU}{SR}$

En notant x la longueur TP : $SP = ST + TP = ST + x$ d'où $\frac{x}{x + ST} = \frac{6370}{700000}$

(résultats dans le tableau ci-dessous)

b. Calcul du rayon OB de l'ombre à la distance de la Lune

On considère (ET) et (OB) parallèles.

On utilise là encore le théorème de

Thalès : $\frac{OP}{TP} = \frac{OB}{TE}$

TP vient d'être calculé, on connaît OP (= TP - TO) et TE (6 370 km), on en déduit OB.

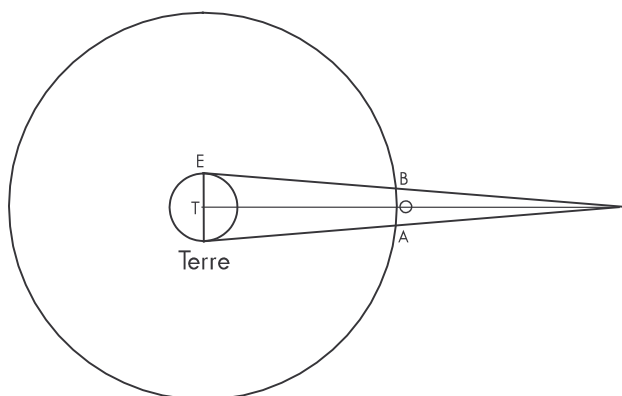


Figure 11

Résultats

Date	10/12/2011	04/06/2012	25/04/2013	15/04/2014	08/10/2014	04/04/2015
Longueur du cône (km)	1352741	1394067	1382129	1378455	1372945	1373864
Rayon de l'ombre (km)	4501	4730	4688	4591	4672	4501

Date	28/09/2015	07/08/2017	31/01/2018	27/07/2018	21/01/2019	16/07/2019
Longueur du cône (km)	1376619	1393149	1353660	1394986	1351823	1396822
Rayon de l'ombre (km)	4718	4564	4676	4516	4683	4550

c. Distances VX et WX

$OV = r_O + r_L$ (rayon de l'ombre + rayon de la Lune)

On connaît d. Le théorème de Pythagore dans le triangle OVX permet de calculer XV.

$OW = r_O - r_L$ (rayon de l'ombre - rayon de la Lune). Avec le théorème de Pythagore dans OWX, on trouve XW (résultats dans le tableau ci-dessous).

d. Horaires

Connaissant la vitesse V et la distance à parcourir, on calcule le temps que met la Lune pour passer de V à X et de W à X et on détermine les horaires.

Résultats

Date	10/12/2011	04/06/2012	25/04/2013	15/04/2014	08/10/2014	04/04/2015
XV (km)	5771	3904	984	6063	5970	5605
XW (km)	1405	*	*	2192	1769	292
Durée de V à X (min)	106	64	16	107	100	104
Durée de W à X (min)	26	*	*	39	29	5

Date	28/09/2015	07/08/2017	31/01/2018	27/07/2018	21/01/2019	16/07/2019
XV (km)	6141	3202	6152	6223	6016	4854
XW (km)	2207	*	2303	2701	1896	*
Durée de V à X (min)	99	58	101	117	98	89
Durée de W à X (min)	36	*	38	51	31	*

Données NASA/IMCCE

L'écart est au maximum d'une minute avec les horaires donnés par les éphémérides (IMCCE <http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/> ou NASA <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>) :

Date	10/12/2011	04/06/2012	25/04/2013	15/04/2014	08/10/2014	04/04/2015
Entrée dans l'ombre	12:45	09:59	19:51	05:58	09:14	10:15
Début de la totalité	14:06	*	*	07:06	10:25	11:54
Maximum de l'éclipse	14:32	11:03	20:08	07:46	10:55	12:00
Fin de la totalité	14:58	*	*	08:25	11:25	12:06
Sortie de l'ombre	16:18	12:07	20:24	09:33	12:35	13:45
Durée de V à X (min)	107	64	17	108	101	105
Durée de W à X (min)	26	*	*	40	30	6
Durée de X à Y (min)	26	*	*	39	30	6
Durée de X à Z (min)	106	64	16	107	100	105

Comparaison avec les calculs

Erreur sur V à X	-1	0	-1	-1	-1	-1
Erreur sur W à X	0	*	*	-1	-1	-1

Date	28/09/2015	07/08/2017	31/01/2018	27/07/2018	21/01/2019	16/07/2019
Entrée dans l'ombre	01:07	17:22	11:48	18:24	03:33	20:01
Début de la totalité	02:11	*	12:51	19:30	04:41	*
Maximum de l'éclipse	02:47	18:20	13:30	20:22	05:12	21:31
Fin de la totalité	03:23	*	14:08	21:13	05:44	*
Sortie de l'ombre	04:27	19:19	15:11	22:19	06:51	23:00
Durée de V à X (min)	100	58	102	118	99	90
Durée de W à X (min)	36	*	39	52	31	*
Durée de X à Y (min)	36	*	38	51	32	*
Durée de X à Z (min)	100	59	101	117	99	89

Comparaison avec les calculs

Erreur sur V à X	-1	0	-1	-1	-1	-1
Erreur sur W à X	0	*	-1	-1	0	*

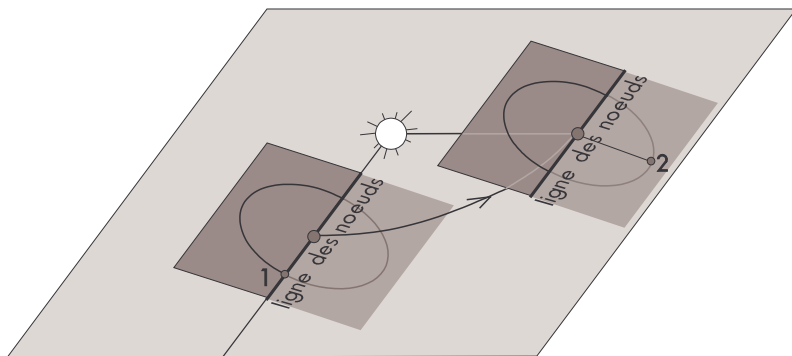
(*) Éclipse partielle

Les heures sont données en heure T.U. (Temps Universel)
Ajoutez 2 heures pour l'heure d'été et 1 h pour l'heure d'hiver.

COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT

1. Attention, sur les schémas représentant la Terre, la Lune et le Soleil, les proportions ne sont pas respectées. On ne peut dessiner lisiblement à une même échelle les trois astres et les distances Terre Lune ou Terre Soleil. Si on représente par exemple la Terre par un disque d'un centimètre de diamètre, la Lune aurait un diamètre de 3 mm et serait située à 30 cm. Quant au Soleil, il serait distant de 120 m et son diamètre serait supérieur à 1 m !

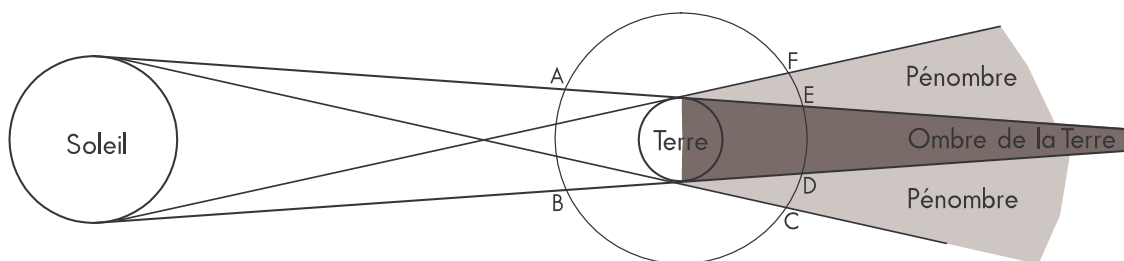
2. Une éclipse de Lune ne peut avoir lieu qu'à la Pleine Lune. Mais comme le plan de l'orbite de la Lune n'est pas confondu avec le plan de l'orbite de la Terre, il n'y a pas éclipse à chaque pleine Lune.



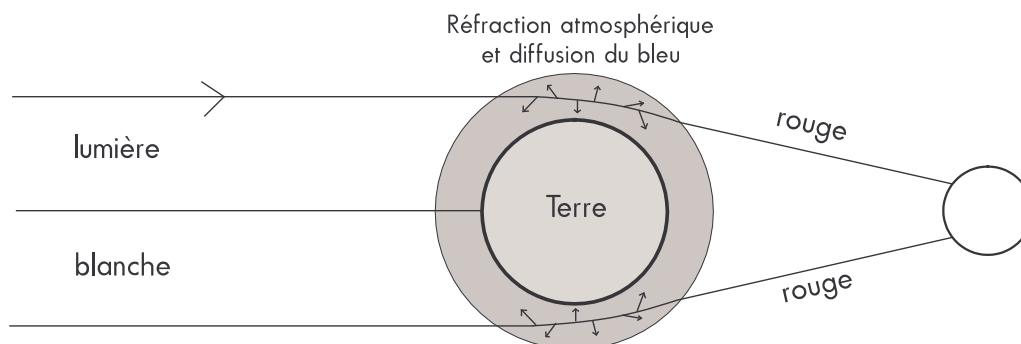
En (1), il y a éclipse, la Pleine Lune ayant lieu quand la Lune passe par la ligne des nœuds (intersection des plans des orbites de la Terre et de la Lune).

En (2), la Lune passe "sous" l'ombre de la Terre, il n'y a pas d'éclipse.

3. Tout autour de l'ombre de la Terre, il existe ce que l'on appelle la pénombre (de C à D et de E à F sur la figure ci-dessous). Une personne située à sa surface verrait une partie du Soleil caché par la Terre. Un observateur terrestre devrait voir la Lune s'assombrir peu à peu. Dans la réalité, ce phénomène n'est pas facile à voir. Les éclipses par la pénombre, quand la Lune passe légèrement "au-dessus" ou "en dessous" le cône d'ombre tout en traversant la pénombre, passent totalement inaperçues.



4. Pendant la totalité, on pourrait croire que la Lune n'est pas visible. En réalité, elle est toujours éclairée par les rayons du Soleil qui sont déviés par la réfraction atmosphérique en frôlant la Terre. De plus, l'atmosphère va diffuser la plus grande partie des photons bleus. Ainsi, ce sont principalement des photons rouges qui vont éclairer notre satellite éclipsé. C'est pour cela que la Lune est rouge lors de la totalité.



À propos de la vitesse de la Lune

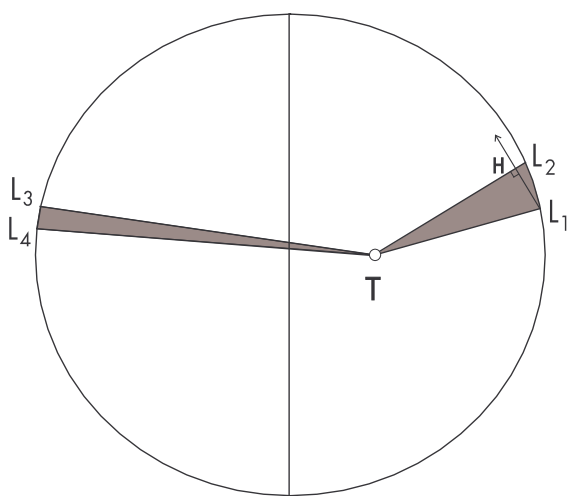
La Lune tourne autour de la Terre en 29,5 jours par rapport au Soleil ou par rapport à l'ombre de la Terre. Cette période s'appelle aussi lunaïson ; c'est l'intervalle de temps séparant deux pleines lunes ou 2 nouvelles lunes.

Si on suppose que la Lune tourne autour de la Terre en décrivant un cercle de 384 400 km de rayon (la distance moyenne Terre Lune) à vitesse constante, on peut calculer simplement la vitesse de la Lune :

$$v = (2 \times \pi \times 384\,400) / (29,5 \times 24) . \text{ On obtient } 3410 \text{ km/h ou } 57 \text{ km/min}$$

En réalité, la vitesse de la Lune sur son orbite est variable et le calcul doit se faire avec les lois de Kepler. Avec des élèves, on peut d'abord effectuer le calcul approximatif ci-dessus puis leur donner le résultat précis qui dépend de la distance Terre Lune.

La Lune décrit en réalité une orbite elliptique et non pas circulaire ; sa distance à la Terre peut varier de 356000 à 407000 km. Et sa vitesse n'est pas constante.



La 2^e loi de Kepler affirme que les aires balayées par le "rayon vecteur" [TL] en des temps égaux sont égales. Si les positions de la Lune L₁ et L₂ sont espacées d'une heure ainsi que L₃ et L₄, les aires grisées sont égales. La Lune va donc plus vite en L₁, lorsqu'elle est plus proche de la Terre, qu'en L₃.

La vitesse qui intéresse l'observateur est en réalité la composante perpendiculaire à la ligne de visée (TL), donc suivant la hauteur (LH). On l'a notée V_L .

On peut assimiler les surfaces grisées à des triangles et considérer la vitesse de la Lune constante pendant une heure. V_L est proportionnel à LH.

L'aire du triangle L₁ L₂ T est égale à $(TL_2 \times L_1 H)/2$

La deuxième loi de Kepler peut alors s'écrire $TL \times V_L = 2A$ (constante).

où A est l'aire balayée par [TL] en 1 heure, TL la distance Terre Lune en km et V_L la vitesse cherchée en km/h.

On peut calculer la constante A puis la vitesse V_L .

Si a est le demi grand axe de l'ellipse (384 400 km), b le demi petit axe et e l'excentricité de l'orbite lunaire (0,055), l'aire de l'ellipse est égale à l'aire du disque de rayon a multipliée par b/a ou $\sqrt{1-e^2}$.

On peut commencer par calculer la vitesse sidérale de la Lune (par rapport aux étoiles) :

$$A = \text{Aire balayée en 1 heure} = \frac{\pi \times 384400^2 \times \sqrt{1-0,055^2}}{27,32 \times 24} \text{ soit } 706\,900\,000 \text{ km}^2 \cdot \text{h}^{-1}$$

On calcule ensuite V_L avec : $V_L = 2A/TL$ ou ω_L (vitesse angulaire) avec $\omega_L = V_L / TL = 2A/TL^2$

Mais, lors d'une éclipse, la vitesse qui nous intéresse n'est pas la vitesse sidérale mais la vitesse par rapport à l'ombre de la Terre.

On peut calculer la vitesse sidérale de la Terre autour du Soleil de la même manière que l'on a calculé la vitesse de la Lune. On obtient :

$$A' = \text{Aire balayée en 1 heure} = \frac{\pi \times 314960000^2 \times \sqrt{1-0,017^2}}{365,256 \times 24} \text{ soit } 8,02 \cdot 10^{12} \text{ km}^2 \cdot \text{h}^{-1}$$

On calcule ensuite V_T avec : $V_T = 2A'/ST$ ou ω_T (vitesse angulaire) avec $\omega_T = V_T / ST = 2A'/ST^2$

Pour simplifier, on peut se placer dans un repère géocentrique (la Terre au centre mais les axes restent liés aux étoiles). Dans ce repère, le Soleil tourne autour de la Terre à la vitesse angulaire $\omega_T = V_T / ST = 2A'/ST^2$.

L'ombre de la Terre tourne avec la même vitesse angulaire.

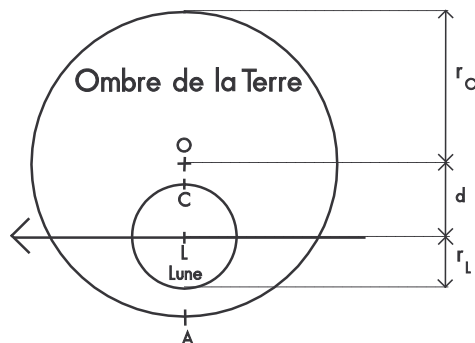
On peut donc calculer la vitesse de la lune par rapport à l'ombre de la Terre en soustrayant les deux vitesses angulaires : $\omega_L - \omega_T$

La vitesse de la Lune cherchée (perpendiculaire à la ligne de visée) est donc $(\omega_L - \omega_T) \times TL$

Grandeur d'une éclipse

En général, les éphémérides donnent non pas la distance d , mais la grandeur de l'éclipse, qui permet de calculer d .

Sur cette figure, la Lune est représentée au moment du maximum de l'éclipse, quand son centre L est au plus près du centre O de l'ombre de la Terre.



r_O = rayon de l'ombre de la Terre

d = distance du centre de la Lune au centre de l'ombre

r_L = rayon de la Lune

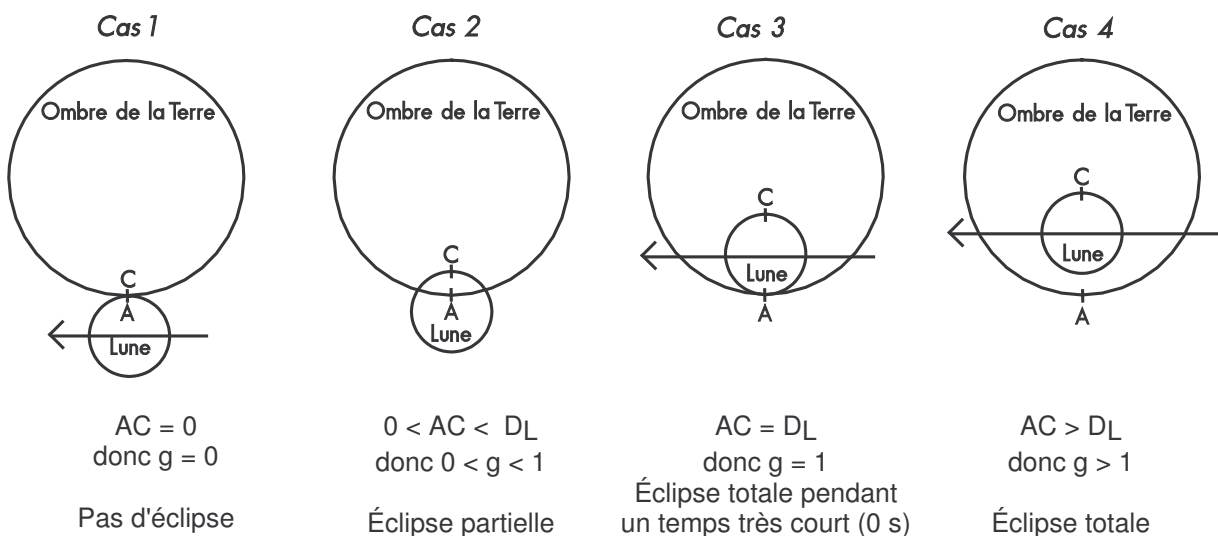
D_L = diamètre de la Lune

On appelle grandeur de l'éclipse la quantité $g = (r_O + r_L - d) / 2 r_L$

Comme : $r_O + r_L - d = OA + LC - (LC + OC) = OA - OC = AC$,

on peut aussi écrire $g = AC / 2 r_L$ ou **$g = AC / D_L$**

Les différents cas d'éclipses



A partir de g , on peut déterminer la distance d du centre de la Lune au centre de l'ombre :

$$d = r_O + r_L - 2.g.r_L$$

Grandeur des prochaines éclipses

Date	10/12/2011	04/06/2012	25/04/2013	15/04/2014	08/10/2014	04/04/2015
Grandeur	1,111	0,376	0,021	1,296	1,172	1,005
Rayon de l'ombre (km)	4500	4728	4687	4590	4673	4502
Distance d (km)	2376	5159	6352	1823	2338	2746

Date	28/09/2015	07/08/2017	31/01/2018	27/07/2018	21/01/2019	16/07/2019
Grandeur	1,282	0,251	1,321	1,614	1,2	0,658
Rayon de l'ombre (km)	4719	4565	4674	4515	4684	4551
Distance d (km)	2000	5430	1821	643	2251	4001

Renseignements sur les éclipses de Lune

On peut trouver les dates et les paramètres des éclipses de Lune :

Sur Internet

<http://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>

<http://www.imcce.fr/> (Grand public / les éclipses de Lune)

On trouve pour l'éclipse de son choix sa grandeur, les horaires ainsi que les rayons angulaires α de la Lune et du Soleil.

Ceux-ci permettent de calculer leur distance r avec $d = r\alpha$ (rad) d'où $r = \frac{180 \times 60}{\pi} \times \frac{\text{rayon}}{\alpha(\text{en}^\circ)}$

(rayon de la Lune = 1 738 km et rayon du Soleil = 695 000 km)

De nombreux logiciels permettent de calculer les dates et heures des éclipses de Lune.

Prochaines éclipses de Lune visibles en France

Pour savoir si une éclipse est visible, parmi celles dont a calculé les horaires, il suffit de chercher si la Lune sera levée ou non.

Une éclipse de lune a lieu à la pleine Lune, celle-ci se lève quand le Soleil se couche et se couche quand le Soleil se lève. Il suffit donc de vérifier si le Soleil sera couché ou non.

Date	10/12/11	04/06/12	25/04/13	15/04/14	08/10/14	04/04/15
Entrée dans l'ombre	12:45	9:59	19:51	5:58	9:14	10:15
Maximum de l'éclipse	14:32	11:03	20:08	7:46	10:55	12:00
Sortie de l'ombre	16:18	12:07	20:24	9:33	12:35	13:45
Visibilité en France	Fin visible au lever de la Lune	Invisible	Visible au lever de la Lune	Invisible	Invisible	Invisible

Date	28/09/15	07/08/17	31/01/18	27/07/18	21/01/19	16/07/19
Entrée dans l'ombre	1:07	17:22	11:48	18:24	3:33	20:01
Maximum de l'éclipse	2:47	18:20	13:30	20:22	5:12	21:31
Sortie de l'ombre	4:27	19:19	15:11	22:19	6:51	23:00
Visibilité en France	Visible	Fin visible au lever de la Lune	Invisible	Fin visible au lever de la Lune	Visible au coucher de la Lune	Visible au lever de la Lune

À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

M&A CLEA ELune Horaires

Cette feuille de calcul donne les paramètres des éclipses de Lune jusqu'en 2026.

