Calcul de la masse de 51 Pegasi b

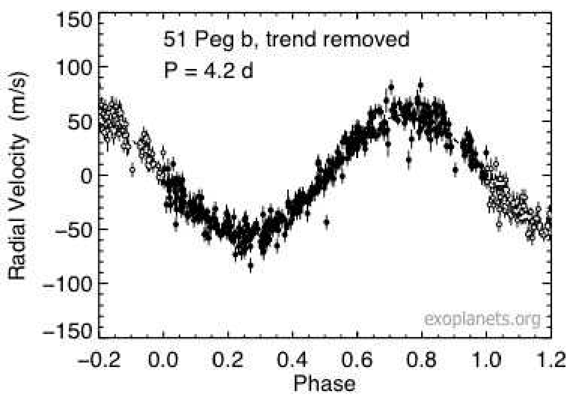
51 Pegasi b est le nom de la première exoplanète découverte par Michel Mayor et Didier Queloz à l'observatoire de Haute-Provence grâce au spectromètre ELODIE. La méthode a été décrite dans le dernier numéro des Cahiers Clairaut. Voici une application concrète, le calcul de la masse de cette planète.

51 Pegasi (51 Peg en abrégé) est le nom de l'étoile. La planète qui orbite autour a été nommée 51 Peg b et surnommée Bellérophon, du nom du héros grec qui a dompté le cheval Pégase.

Ce que l'on savait de 51 Peg

51 Peg est une étoile semblable au Soleil, de type spectral, G3 V. De plus, on connaît sa distance par mesure de parallaxe (48 années-lumière), sa magnitude visuelle par l'observation (5,5), donc sa magnitude absolue (4,5). À partir de ces données, on trouve que sa masse est très légèrement supérieure à celle du Soleil (1,06 masse solaire soit $2{,}1\times10^{30}$ kg).

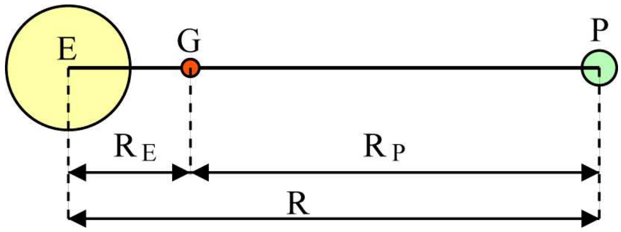
Ce que nous a appris ELODIE



(image exoplanets.org sur en.wikipedia.org)

Le graphique ci-dessus représente les valeurs de la vitesse radiale déduites des mesures du spectromètre. La vitesse radiale maximale est un peu supérieure à 50 m/s et la période (notée P = 4.2 d sur ce graphique) est de 4,2 jours. Pour les calculs ci-dessous, on a retenu une vitesse radiale maximale de 56 m/s.

Notations



On note :

R_E, la distance du centre de l'étoile au centre de masse du système étoile planète (inconnue).

M_P, la masse de la planète (inconnue) et M_E la masse de l'étoile (connue) : $M_E = 2{,}1\times10^{30}$ kg.

R_P, la distance du centre de la planète au centre de masse du système étoile planète (inconnue).

R, la distance du centre de l'étoile au centre de la planète (inconnue).

V_E, la vitesse linéaire (supposée constante) de l'étoile sur son orbite (supposée circulaire) autour du centre de masse. Si on suppose que la Terre est dans le plan de l'orbite, la vitesse radiale maximale mesurée par effet Doppler est égale à V_E. On prendra $V_E = 56$ m/s. Si la Terre n'est pas dans le plan de l'orbite, V_E est supérieur à la vitesse radiale mesurée.

F, la force d'attraction entre l'étoile et la planète.

T_E, la période de révolution de l'étoile autour du centre de masse. $T_E = 4{,}2$ jours. On a la même période de révolution pour la planète $T_P = 4{,}2$ jours.

Les formules

(1) $M_E\, R_E = M_P\, R_P$ (définition du centre de masse).

(2) $R = R_E + R_P$ (voir figure).

(3) $F = G\,\dfrac{M_E\, M_P}{R^2}$ (loi de Newton).

(4a) $F = M_E\,\dfrac{V_E^2}{R_E}$ et (4b) $F = M_P\,\dfrac{V_P^2}{R_P}$ (force centripète).

(5a) $T_E\, V_E = 2\,\pi\, R_E$ et (5b) $T_P\, V_P = 2\,\pi\, R_P$ (distance parcourue en une révolution).

Calcul de R_P à partir de M_E et T_P

Les formules (3) et (4b) donnent $V_P^2 = G\,\dfrac{M_E\, R_P}{R^2}$.

La formule (5b) donne $V_P^2 = \dfrac{4\,\pi^2\, R_P^2}{T_P^2}$

d'où $G\,\dfrac{M_E\, R_P}{R^2} = \dfrac{4\,\pi^2\, R_P^2}{T_P^2}$ ou $\dfrac{T_P^2}{R_P\times R^2} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\, M_E}$.

Or, $R_P\times R^2 = R_P\times(R_P + R_E)^2 = R_P^3\times(1 + R_E/R_P)^2 = R_P^3\times(1 + M_P/M_E)^2$ qu'on assimile à R_P^3 car $M_P << M_E$.

On retrouve donc la 3e loi de Kepler $\dfrac{T_P^2}{R_P^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\, M_E}$.

Avec $G = 6{,}67\times10^{-11}$, $M_E = 2{,}1\times10^{30}$ kg, $T_E = 4{,}2\times24\times3600$ s, on trouve :

$R_P = 7{,}76\times10^9$ m soit environ 7,76 millions de km.

Calcul de M_P
La formule (5a) $T_E\ V_E = 2\ \pi\ R_E$ donne R_E :
$T_E = 4{,}2 \times 24 \times 3600$ s et $V_E = 56$
d'où $R_E = 3{,}23 \times 10^6$ m.

On peut alors calculer M_P avec la formule (1) :
$M_E\ R_E = M_P\ R_P$.
$M_E = 2{,}1 \times 10^{30}$ kg , $R_E = 3{,}23 \times 10^6$ m,
$R_P = 7{,}76 \times 10^9$ m donc $M_P = 8{,}75 \times 10^{26}$ kg.
On convertit souvent en masse de Jupiter ($1{,}908 \times 10^{27}$ kg) :

La masse de 51 Peg b est 0,46 fois la masse de Jupiter.

Comme on n'a pas tenu compte d'une éventuelle inclinaison de l'orbite, il s'agit ici d'une masse minimale.

Remarque La formule générale donnant M_P est :
$$M_P^3 = \frac{M_E^2 \times T_E \times V_E^3}{2\pi G}.$$