Mesurer la hauteur d'une montagne sur la Lune

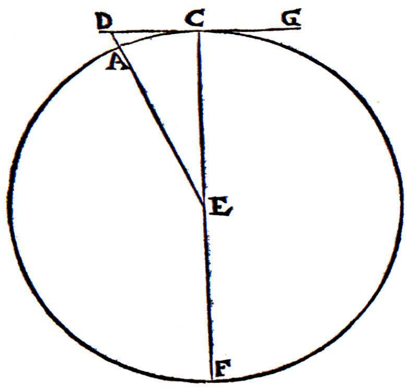
1. La méthode de Galilée

a. Extrait du Sidereus Nuncius de Galileo Galilei.

Traduction édité par le CLEA, l'observatoire de Lyon et la SAL et disponible en PDF à l'adresse http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/fc/ama09/ama09.html

J'avais très souvent observé, dans les différentes positions de la Lune par rapport au Soleil, que quelques sommets situés dans la partie non éclairée de la Lune, même assez éloignés de la limite ombre-lumière, semblaient illuminés par la lumière solaire.

En comparant leur distance par rapport à cette limite au diamètre de la Lune, j'observai que cet intervalle dépassait parfois un vingtième du diamètre. Ceci étant admis, supposons que le corps lunaire soit un grand cercle CAP, de centre E. Le diamètre CF est par rapport à celui de la Terre comme deux à sept. Or le diamètre de la Terre est selon les plus exactes observations de 7000 milles italiques (*). Donc CF mesurera 2000, CE 1000, et le vingtième de CF sera 100. Soit CF le diamètre du grand cercle qui sépare la partie lumineuse de la Lune de la partie obscure (en raison du très grand éloignement du Soleil par rapport à la Lune, ce cercle ne diffère pas sensiblement d'un grand cercle. Soit un point A distant du point C du vingtième de ce diamètre, prolongeons le rayon EA qui rencontre la tangente GCD au point D (cette tangente représente le rayon illuminant). L'arc CA, ou le segment CD, vaudra donc 100 des unités dont CE vaut 1000, et la somme des carrés de DC et CE vaudra 1 010 000, quantité égale au carré de DE ; DE vaudra donc plus de 1004, et AD plus de 4 des unités dont CE contenait 1000.



Donc le segment AD, qui correspond sur la Lune à un sommet qui monte jusqu'au rayon solaire GCD et qui est séparé de la limite C par la distance CD, a plus de 4 milles italiques de hauteur, alors que sur Terre il n'existe pas de montagnes qui atteignent une hauteur d'un seul mille à la verticale ; il est donc clair que les sommets sont plus élevés sur la Lune que sur la Terre.

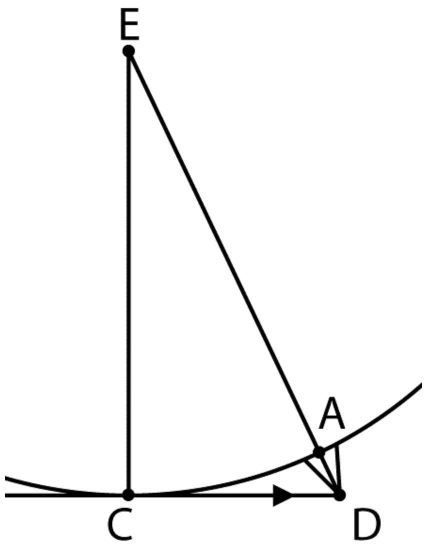
(*) Un mille italique aurait cinq mille sept cent douze pieds, soit 1 685 mètres.

b. Application de la méthode (exercice 7)

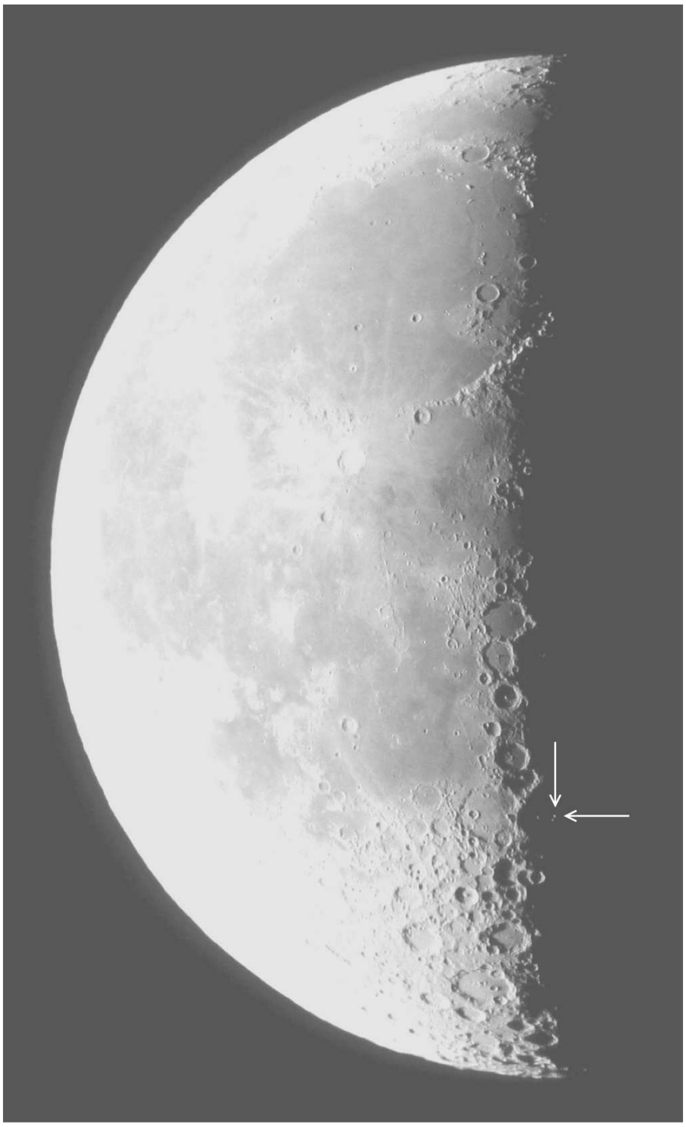
Sur cette photo de la Lune au dernier quartier, on aperçoit le sommet éclairé d'une montagne (flèches).

Sauriez vous calculer la hauteur de cette montagne ?

Vous pourrez utiliser le schéma ci-dessous (ce schéma est fait dans le plan qui contient le rayon de Soleil CD et le centre de la Lune)



Rappel :
Le diamètre de la Lune vaut 3 500 km.



Solution

Le diamètre de la Lune sur la photo est de 135 mm pour un diamètre réel de 3 500 km ce qui donne une échelle de 1 mm pour 26 km.

On peut prendre comme point C du schéma le bord du cratère sur la photo. On mesure alors 5 mm pour CD ce qui correspond à 130 km en réalité.

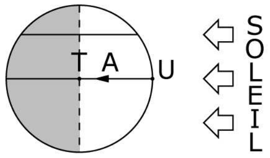
On applique le théorème de Pythagore dans CDE (avec CE = 1750) et on obtient 1754,8 km pour DE donc 4,8 km pour DA.

On peut vérifier avec un atlas de la Lune. Le point D est au bord du cratère Walter dont les remparts culminent à 4 100 m.

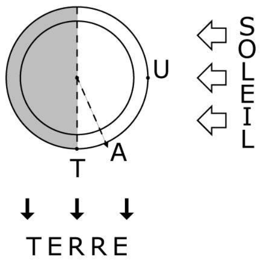
2. Mesure de la longueur de l'ombre

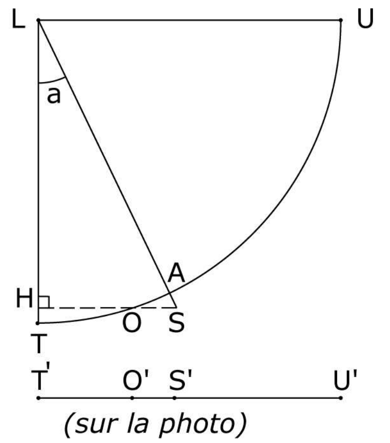
a. Montagne sur l'équateur au premier ou dernier quartier (voir exercice 9b)

Vue n°1
depuis la Terre



Vue n°2
depuis le "pôle Nord" de la Lune (dans une direction perpendiculaire au plan Terre Lune Soleil)





Dans le plan de l'équateur (vue 2)

A : base de la montagne.
S : sommet.
O : extrémité de l'ombre.
T : point du terminateur.
L : centre de la Lune.

À partir d'une photo :
- On détermine l'échelle.
- On mesure O'S' et S'T'.
- On détermine le sinus de l'angle a en assimilant LS au rayon de la Lune.
- On considère que le triangle AOS est rectangle en A. L'angle $\widehat{AOS}$ est égal à l'angle a (les deux sont complémentaires de $\widehat{LSH}$). Le sinus de a permet de déterminer AS, la hauteur de la montagne.

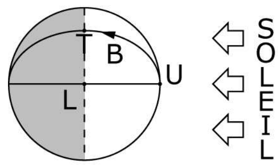
L'égalité des sinus de a et de $\widehat{AOS}$ s'écrit : SA/SO = SH/LS donc SA = SO×SH/LS ou encore

Hauteur de la montagne = longueur de l'ombre × distance au terminateur / rayon de la Lune

b. Montagne n'étant pas sur l'équateur au premier ou dernier quartier

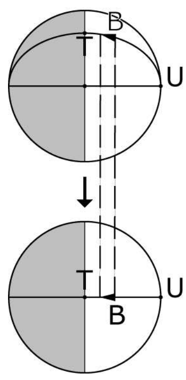
- Direction de l'ombre :

L est le centre de la Lune, B est la base de la montagne.
L'ombre est dans le plan qui contient (LB) et le Soleil S.
Elle se trouve donc dans l'intersection du plan (LBS) et de la surface de la Lune ; cette intersection est un grand cercle qui contient le point U et le point B. On le voit depuis la Terre comme une ellipse.
T est le point du terminateur qui se trouve sur cette ellipse.



- Calcul de la hauteur de la Lune :

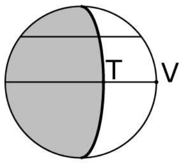
Si on fait tourner la Lune autour de l'axe (LU), la longueur réelle de l'ombre de la montagne ne change pas. On retrouve exactement la situation étudiée au paragraphe précédent (montagne sur l'équateur).
On peut donc appliquer exactement la même méthode qu'au paragraphe a. La longueur de l'ombre à mesurer est celle qui est comprise entre les deux lignes pointillées (on la mesure sur la photo parallèlement à l'équateur).



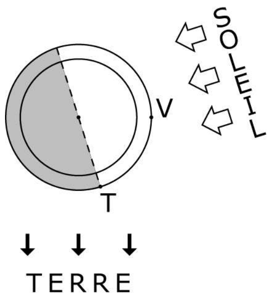
c. Montagne sur l'équateur en dehors du premier ou du dernier quartier

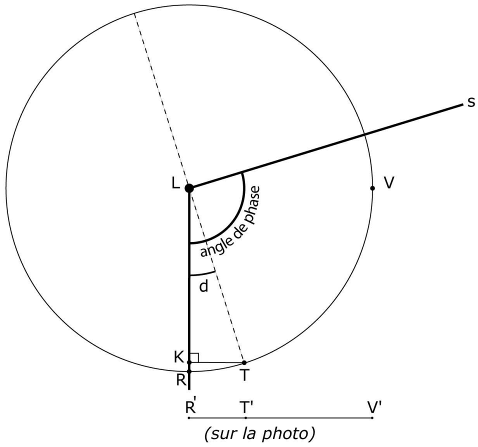
- Pour connaître la direction des rayons du Soleil, il faut déjà déterminer l'angle de phase.

Vue n°1
depuis la Terre



Vue n°2
depuis le "pôle Nord" de la Lune (dans une direction per-pendiculaire au plan Terre Lune Soleil)





Dans le plan de l'équateur (vue 2)

L : centre de la Lune.
R : centre de la face visible de la Lune.
s : direction du Soleil.
T : point du terminateur.

L'angle de phase est l'angle Terre Lune Soleil.

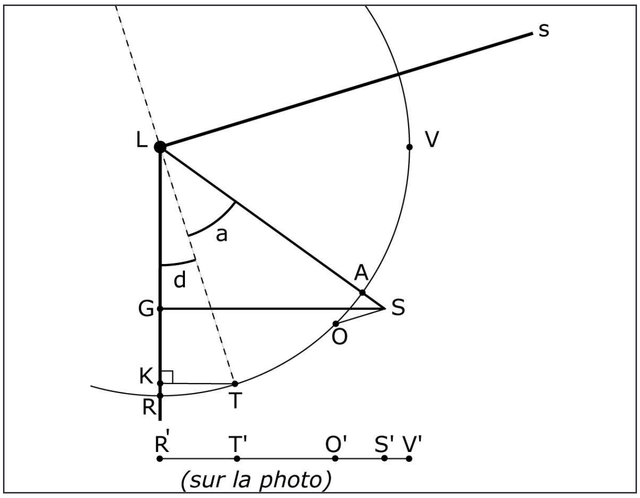
Sur une photo, il faut déjà placer le centre de la Lune puis mesurer R'T' et R'V'. On en déduit alors d avec sin d = RT/LT.

- Pour la hauteur de la montagne, on mesure O'S' et R'S' (figure de droite).

On calcule ensuite $\widehat{GLS}$ (avec son sinus), puis a.

Avec O'S', on calcule OS (O'S'/cos d)

On en déduit AS car on connaît l'angle $\widehat{SOA}$ (= a).



Un exemple : hauteur du rempart du cratère Langrenus

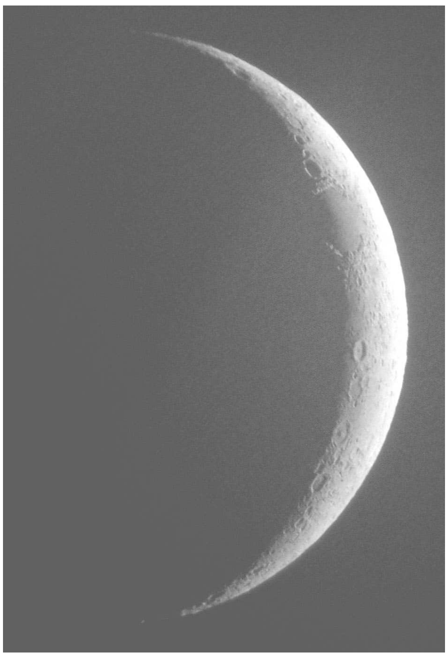
1. R'V' = 39 mm ;
   R'T' = 30,5 mm.
   sin d = RT/r_L = 30,5/39
   d ≈ 51,4°.
   Angle de phase :
   90°+51,4° = 141,4°.

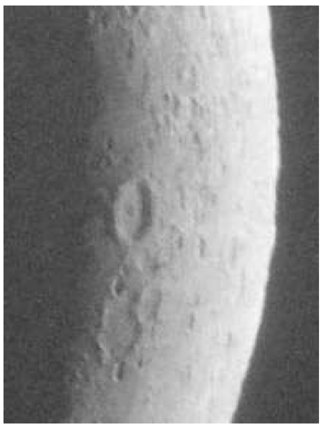
2. Échelle : 44,6 km/mm.

3. O'S' ≈ 0,4 mm (18 km)
   R'S' = 33,5 mm (GS = 1 500 km)

4. sin $\widehat{GLS}$ = GS/LS
   $\widehat{GLS}$ ≈ 59,5°
   a = 59,5 - 51,4 = 8,1°
   OS = 18/cos51,4° ≈ 29 km
   AS = OS sin $\widehat{SOA}$ ≈ 29 sin 8,1

soit environ 4 km (au lieu de 3 maxi)

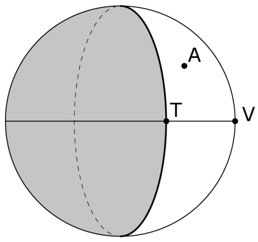




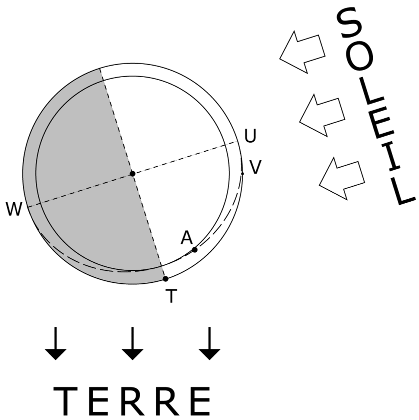
(extrait agrandi à l'échelle 3)

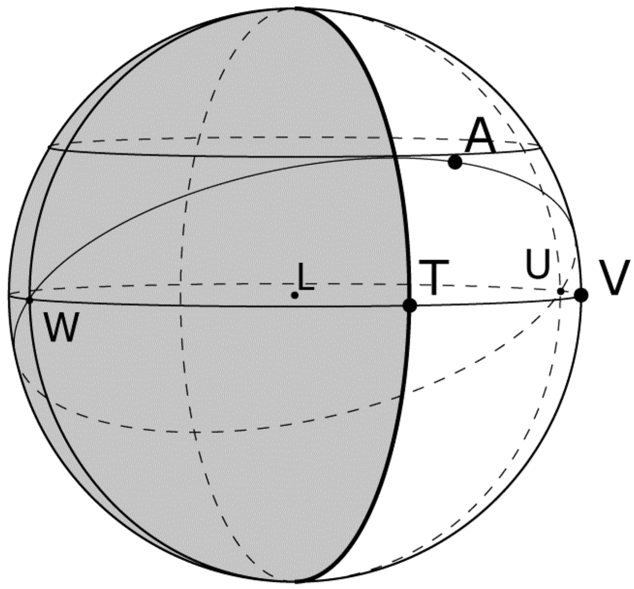
d. Cas général

Vue n°1
depuis la Terre



Vue
n°2
depuis
le "pôle
Nord"
de la
Lune





L : centre de la Lune. U : direction du Soleil.
T : point du terminateur.

- Direction de l'ombre :
L est le centre de la Lune, A est la base de la montagne, (WU) est la direction du Soleil. L'ombre est dans le plan qui contient W, A, U (et L).
Cette intersection est un grand cercle de diamètre [WU] qui passe par A. On le voit depuis la Terre comme une ellipse.

- Hauteur de la montagne :

Méthode 1 : si l'observateur se déplace pour être sur la ligne (LT), on retrouve la situation b.

Méthode 2 : Il existe une solution analytique relativement simple pour calculer la longueur de l'ombre observée de n'importe quelle montagne sur la Lune à partir de ses coordonnées et de sa hauteur. A l'inverse, on peut l'utiliser pour trouver par approximation la hauteur à partir de la longueur de l'ombre.