Maths et Astronomie
4. La Lune

SOLUTIONS
COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT
À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

SOLUTIONS

Précisions : Vous trouverez les calculs dans le fichier **M&A CLEA Lune solutions.xls**.
La distance Terre Lune, mesurée de centre à centre, vaut en moyenne 384 400 km mais elle varie entre 356 000 km et 407 000 km (voir exercice 11).

1.a. En 3e, on proposera aux élèves d'ajouter un point H, pied de la hauteur issue de A dans le triangle ATL.

$\widehat{ATN} = 47{,}8° - 6{,}45° = 41{,}35°$; $\widehat{TAL} = 180° - 41{,}97° = 138{,}03°$; $\widehat{ALT} = 180° - 41{,}35° - 138{,}03° = 0{,}62°$

AH = AT sin $\widehat{ATN}$ = 6 370 sin 41,35° ≈ 4 208 ;

TH = AT cos $\widehat{ATN}$ = 6 370 cos 41,35° ≈ 4 782 ;

HL = AH / tan $\widehat{ALT}$ = AH / tan 0,62° ≈ 388 892 ;
TL = TH + HL ≈ 393 700 km ;

En lycée, c'est évidemment plus rapide avec la loi des sinus : AT / sin $\widehat{ALT}$ = TL / sin $\widehat{TAL}$
Si on appelle z la distance zénithale et t la différence de latitude entre A et N, la formule générale est

$TL = R\,\dfrac{\sin z}{\sin(z-t)}$ ou, en passant par H : $TL = R \times \left(\cos t + \dfrac{\sin t}{\tan(z-t)}\right)$

2. On suppose ici que les mesures ont été faites quand la Lune était dans le plan du méridien qui est le plan de la figure (Lune vers le Sud à Berlin, vers le nord au Cap).
Le problème n'est pas simple. Il s'agit de déterminer les côtés d'un quadrilatère dont on connaît les angles et deux côtés. Il est intéressant de montrer qu'une figure à l'échelle ne permet pas d'obtenir un résultat correct.
L'énoncé est volontairement court et peu détaillé pour permettre un temps de réflexion sur la méthode à utiliser. Il peut être ensuite complété par des questions intermédiaires.
Voici trois méthodes de résolution possible.

<u>Angles connus</u>

$\widehat{bBL} = 31{,}77°$ donc $\widehat{TBL} = 148{,}23°$; $\widehat{cCL} = 56{,}06°$ donc $\widehat{TCL} = 123{,}94°$;

$\widehat{BTC} = 52{,}52° + 33{,}92° = 86{,}44°$;

$\widehat{BLC} = 360° - \widehat{TBL} - \widehat{TCL} - \widehat{BTC} = 1{,}39°$

On peut déterminer les angles à la base du triangle isocèle : $\widehat{BCT} = \widehat{CBT} = (180° - 86{,}44°) / 2 = 46{,}78°$.

<u>Première méthode</u>

a. Dans le triangle isocèle BTC, on connaît 2 côtés et 3 angles, on trouve BC :

- avec la loi des sinus dans le triangle : $BC = R \times \dfrac{\sin \widehat{BTC}}{\sin \widehat{BCT}} = 6\,370 \times \dfrac{\sin 86{,}44°}{\sin 46{,}78°} \approx 8\,724$ km

- ou en utilisant le point H, milieu de [BC] : $BC = 2\,BH = 2R \sin \dfrac{\widehat{BTC}}{2} \approx 8\,724$ km

b. Dans le triangle BCL :

$\widehat{BLC} = 1{,}39°$

$\widehat{BCL} = \widehat{TCL} - \widehat{TCB} = 77{,}16°$

On applique à nouveau la loi des sinus : BL = BC × sin $\widehat{BCL}$ / sin $\widehat{BLC}$ ≈ 350 700 km
On a déjà une valeur approchée de la distance Terre - Lune.

c. On peut trouver TL avec le théorème d'al Kashi dans BTL :

$TL^2 = BT^2 + BL^2 - 2 \times BT \times TL \times \cos \widehat{TBL}$; on trouve TL ≈ 356 092 km que l'on peut arrondir à 356 000 km.

Si on appelle t la différence de latitude, z_1 et z_2 les distances zénithales de la Lune vue depuis Berlin et Le Cap, la formule générale permettant de calculer TL est :

$$\left(\frac{TL}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2\sin\frac{t}{2} \times \sin\left(z_1 + z_2 - \frac{t}{2}\right)}{\sin^2(z_1 + z_2 - t)}\left[\cos(z_1 + z_2 - t) + \cos(z_2 - z_1)\right]$$

Deuxième méthode

On note $\widehat{BLT} = p_1$, $\widehat{CLT} = p_2$ et $\widehat{BLC} = p$ (angles en radians).
Si on écrit la loi des sinus dans les triangles TBL et TCL, on a :

$$TL = r \times \sin \widehat{TBL} / \sin p_1 = r \times \sin \widehat{TCL} / \sin p_2 \text{ donc } \frac{\sin \widehat{TBL}}{\sin p_1} = \frac{\sin \widehat{TCL}}{\sin p_2}$$

p_1 et p_2 étant petits, on assimile les sinus aux angles en radians, ce qui donne.

$$\frac{\sin \widehat{TBL}}{p_1} = \frac{\sin \widehat{TCL}}{p_2} = \frac{\sin \widehat{TBL} + \sin \widehat{TCL}}{p_1 + p_2} = \frac{\sin \widehat{TBL} + \sin \widehat{TCL}}{p} \text{ ; or, on connaît p.}$$

$$\text{d'où } TL = r \times \frac{\sin \widehat{TBL}}{\sin p_1} = r \times \frac{\sin \widehat{TBL} + \sin \widehat{TCL}}{p}$$

Le calcul donne 356 082 km au lieu de 356 092 avec la première méthode.

Troisième méthode

On se place dans le repère (T, E, N) et on écrit des équations des droites (BL) et (CL).
Angle que forme (BL) avec l'axe des abscisses : 52,52° - 31,77° = 20,75°
Équation de (BL) : y - sin 52,52° = tan 20,75° (x - cos 52,52°)
Angle que forme (CL) avec l'axe des abscisses : 56,06 - 33,92 = 22,14°
Équation de (CL) : y + sin 33,92° = tan 22,14° (x - cos 33,92°)
Il n'y a plus qu'à chercher les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
On trouve x ≈ 52,0865 et y ≈ 20,2968 d'où TL ≈ 56 (l'unité est le rayon terrestre) soit 356 091 km. Voir tableur.
Pour une fois, la méthode analytique n'est pas la plus compliquée…

Quelques remarques

Le résultat peut paraître petit mais Lalande précise que cette observation s'est déroulée aux environs du périgée. On sait maintenant que la distance minimale au périgée est de 356 400 km.
En réalité, Lalande et Lacaille ont effectué de nombreuses mesures pour arriver à un résultat précis.
Les calculs effectués sont plus complexes puisqu'il fallait tenir compte :
- du fait que Berlin et Le Cap ne sont pas tout à fait sur le même méridien ;
- de l'aplatissement de la Terre ;
- de la réfraction atmosphérique.

3. Environ 380 000 km (300 000 × 2,534 / 2).
Il faut préciser que le miroir n'est pas plan mais qu'il s'agit d'un trièdre trirectangle ou plutôt d'une mosaïque de trièdres trirectangles.
En prenant comme plans de coordonnées les trois miroirs, une réflexion par rapport à l'un des plans change le signe de l'une des coordonnées et conserve les deux autres.
À l'issue des trois réflexions, $\vec{u}$ (a, b, c) devient $-\vec{u}$ (–a, –b, –c) d'où le retour parallèle.

4. On assimile un diamètre lunaire à un arc de cercle de longueur :
$2\pi \times 380\,000 \times 0{,}52 / 360 \approx 3\,450$ km (c'est en réalité 3 475 km)
D'autres méthodes sont possibles (avec la trigonométrie ou l'angle en radian).

5. **1.** **a.** 64 000 heures soit plus de 7 ans.
b. 1 280 heures ou 53 jours.
c. 1,28 seconde.
2. $v = 384\,000/(97 + 1/3) \approx 3\,945$ km/h

6. Galilée utilise simplement le théorème de Pythagore dans DCE.
Avec CE = 1 000 et CD = 100, on trouve que DE vaut environ 1 005 (1 004 pour Galilée).
Ce qui donne une hauteur de montagne de 5 milles italiques soit plus de 8 000 m.

7. Le diamètre de la Lune sur la photo est de 135 mm pour un diamètre réel de 3 500 km ce qui donne une échelle de 1 mm pour 26 km.
On peut prendre comme point C du schéma le bord du cratère sur la photo. On mesure alors 5 mm pour CD ce qui correspond à 130 km en réalité.
On applique le théorème de Pythagore dans CDE (avec CE = 1750) et on obtient 1754,8 km pour DE donc 4,8 km pour DA.
On peut vérifier avec un atlas de la Lune. Le point D est au bord du cratère Walter dont les remparts culminent à 4 100 m.

8. Le principe est le même que dans l'exercice précédent, sans problème d'échelle. Si on appelle L le centre de la Lune : $LM^2 = LP^2 + PM^2$; $1\,743{,}6^2 = 1\,740^2 + PM^2$ d'où PM $\approx$ 112 km

9. a. Le diamètre de la Lune sur la photo est de 135 mm pour un diamètre réel de 3 500 km ce qui donne une échelle de 1 mm pour 26 km.
Le cratère Agrippa mesure 2 mm sur la photo donc 52 km en réalité (les atlas donnent 46 km).
Albategnius mesure 5 mm sur la photo donc 130 km en réalité (les atlas donnent 136 km)

b. On mesure sur la photo de droite 0,5 mm pour l'ombre O'S' (ou 1 mm sur l'agrandissement) et 11 mm (22 mm sur l'agrandissement) pour S'T' ce qui correspond à 13 et 285 km.
On considère que LS peut être assimilé au rayon de la Lune (AS est petit devant AL), on a :

sin a = SH/LS = 285/1 750 d'où a ≈ 9,4 °. Son complémentaire $\widehat{LSH}$ mesure 80,6°.
On assimile l'arc OA à un segment et le triangle AOS à un triangle rectangle en A.

$\widehat{ASO}$ mesure 80,6° donc $\widehat{AOS}$ vaut 9,4°.

sin $\widehat{AOS}$ = AS/SO d'où AS = 13 × sin 9,4° $\approx$ 2,1 km ce qui est un peu inférieur aux données des atlas (3 km). Il est évidemment plus simple de ne pas passer par l'angle et d'écrire, par similitude des triangles AS/SO = SH/LS (ou environ SH/LA).

10. Voir le fichier Géoplan *M&A CLEA Lune Ex10.g2w* pour l'explication du phénomène. Utiliser les flèches haut/bas pour faire défiler le temps (on peut changer le pas avec les touches + ou -).

A. On obtient 27 jours et 8 heures soit environ 27,3 j.

B.a.

Nombre de jours x	**27,3**	**81,9**	**13,65**	**2,73**	54,6	1	40	x
Nombre de tours a(x)	1	3	0,5	0,1	**2**	**1 / 27,3**	**1,465**	**x / 27,3**

b. a(x) = x / 27,3 (ou 0,0366x)

C.a.

Nombre de jours x	**365**	**730**	**36,5**	1	40	x
Nombre de tours b(x)	1	2	0,1	**0,00274**	**0,11**	**x / 365**

b. b(x) = x / 365 (ou 0,00274 x)

D. a. Angles alternes - internes
b. 1 tour de plus pour la Lune
c. a(x) = 1 + b(x) donc x / 27,3 = 1 + x / 365 d'où x $\approx$ 29,5
La lunaison dure 29,5 jours (on l'appelle aussi période synodique de la Lune).

11. Voir la feuille de calcul.
a. 384 400 km (c'est la distance moyenne donnée habituellement).
b. 357 074 et 406 427 km. L'orbite lunaire est approximativement une ellipse. Mais celle-ci se déforme continuellement sous l'effet de l'attraction du Soleil. Son excentricité varie de 0,045 à 0,065.
La distance minimale (au périgée) peut descendre à 356 400 km et la distance maximale (à l'apogée) peut atteindre 406 700 km.
c. Moyenne augmentée de 5% : 403651 km
Moyenne diminuée de 5% : 365208 km.
La phrase est donc vraie.

12. a. Si on assimile BT à un arc de cercle centré sur S :

$$BT = 150\times10^6\times\frac{6{,}4}{3600}\times\frac{\pi}{180} \approx 4\,650 \text{ km.}$$

b. B est situé à l'intérieur de la Terre, à 1 700 km sous la surface

c. 

$m_T \times BT = m_L \times BL$. On trouve $m_L \approx 73{,}3 \times 10^{21}$ soit environ 1/82 m_T.

d. $\frac{R_T}{R_L} \approx 3{,}67$; $\frac{V_T}{V_L} \approx 50$; $\frac{m_T}{m_L} \approx 82$; $\frac{\rho_T}{\rho_L} \approx \frac{82}{50} = 1{,}64$.

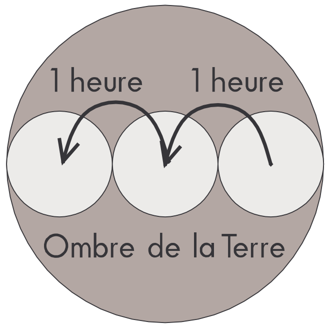
e. $$\frac{\dfrac{G\times m_T}{R_T^{\,2}}}{\dfrac{G\times m_L}{R_L^{\,2}}} = \frac{m_T / m_L}{(R_T / R_L)^2} \approx \frac{82}{3{,}67^2} \approx 6\,.$$ Notre poids sur la Lune vaut 1/6 de notre poids sur Terre.

COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT

Distances

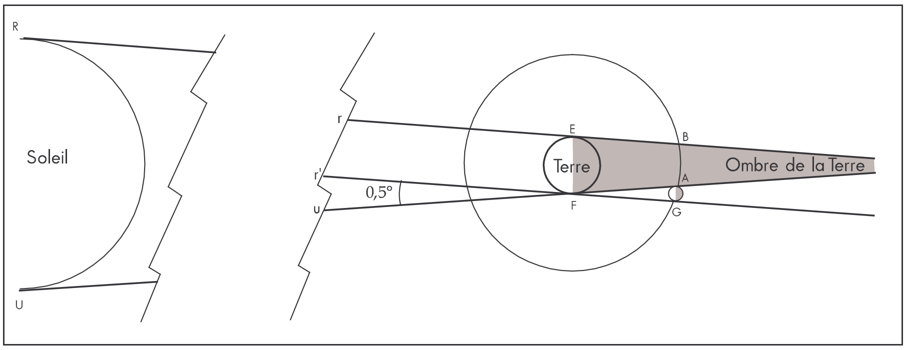
Historiquement, la première méthode pour mesurer la distance de la Lune a utilisé les éclipses de Lune.

La durée maximale d'une éclipse de Lune est de 2 heures (en réalité 1 h 45).
La Lune avance de son diamètre apparent (0,5°) en 1 heure.
On peut donc mettre 3 lunes dans l'ombre de la Terre. Si on assimile l'ombre de la Terre à un cylindre, le diamètre de l'ombre est le même que celui de la Terre. On en déduit celui de la Lune.
Et comme on connaît le diamètre apparent de la Lune (0,5°), on peut trouver sa distance.



Résultats d'Aristarque :
Diamètre de la Lune ≈ 1/3 du diamètre de la Terre
Distance : un peu moins de 80 rayons terrestres

En réalité, l'ombre de la Terre est conique et les Grecs savaient en tenir compte. Comme le diamètre apparent du Soleil est le même que celui de la Lune (0,5°), un raisonnement simple permet de montrer que le diamètre de la Terre est égal au diamètre de l'ombre + un diamètre de la Lune.



En 1751 deux astronomes français ont réalisé la première mesure précise de la distance de la Lune, Lalande à Berlin et La Caille au Cap, par la méthode des parallaxes (exercice 2).
En général, on ne donne pas cette distance (qui dépend du rayon terrestre) en unité de longueur mais sous la forme d'un angle, la parallaxe lunaire, qui est l'angle sous lequel on voit le rayon de la Terre depuis le centre de la Lune.
Lalande et Lacaille ont obtenu 57' 11" comme valeur moyenne (la valeur admise actuellement est 57' 2").
Pour trouver la distance de la Lune, il suffit de diviser le rayon terrestre par la parallaxe en radian.

On peut aussi calculer la distance de la Lune à partir d'une éclipse de Soleil
(voir la fiche **M&A CLEA Lune fiche distance eclipse 031005**).

Mesures sur la Lune

Quand on fait un schéma pour effectuer les calculs, il n'est pas toujours facile de savoir dans quel plan on se place.
Ex 6. Galilée précise bien qu'il utilise un grand cercle
Ex 7. On se place ici dans un plan passant par le centre de la Lune, le sommet éclairé et le Soleil. Ce plan coupe la Lune suivant un grand cercle.
Ex 9a. La méthode simplifiée fonctionne ici parce que l'on a pris un cratère proche du centre de la face visible de la Lune. Si on s'en éloigne, un cratère circulaire apparaît elliptique. Il suffit alors de mesurer le grand axe de cette ellipse car celui-ci est perpendiculaire à la ligne de visée. Et on applique les mêmes calculs que pour Agrippa ou Albategnius.
b. Là encore, on a utilisé une méthode simplifiée qui fonctionne pour un cratère proche du centre de la face visible au premier ou au dernier quartier. Dans les autres cas, c'est un peu plus compliqué (voir la fiche **M&A CLEA Lune fiche montagne Lune**).

Mouvements

Ex 10. Cet exercice permet de passer par le calcul de la période sidérale de la Lune (27,3 jours) à la période synodique ou lunaison de 29,5 jours. On pourra aussi regarder le schéma et l'explication dans les compléments de la partie "calendriers" avec une autre méthode de calcul (à partir des vitesses angulaires).

Une animation sous Géoplan (**M&A CLEA Lune ex10.g2w**) permet d'expliquer le problème et de vérifier les solutions (appuyer sur la flèche haut pour faire défiler le temps). On peut la présenter après avoir répondu à la question 1 ou encore à la fin pour vérification.

À propos de la question a : le plan de l'orbite lunaire est incliné de 5° par rapport au plan de l'orbite terrestre. De plus, l'intersection de ces deux plans (qu'on appelle la ligne des noeuds) se déplace avec une période de 18,6 ans. La Lune ne repasse donc jamais exactement au même endroit par rapport aux étoiles. On n'a donc pas une occultation d'Aldébaran à chaque fois que la Lune traverse la constellation du Taureau.

À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

M&A CLEA Lune solutions
Les solutions des exercices sur tableur.

M&A CLEA Lune Ex10.g2w
Une animation pour comprendre la différence entre la période sidérale de 27,3 jours et la lunaison de 29,5 jours.
On fait avancer le temps avec les flèches :
- le temps s'affiche dans la fenêtre du haut en jours.
- le nombre a est le nombre de tours effectués par la Lune autour de la Terre.
- le nombre b est le nombre de tours effectués par la Terre autour du Soleil.

Après 27,3 jours, on retrouve la même direction Terre - Lune par rapport aux étoiles (a = 1).
Après 29,5 jours, on retrouve un alignement Soleil Lune Terre donc une nouvelle Lune (a = 1,081 et b = 0,081).

Dossier Hauteur montagne
Une fiche "M&A CLEA Lune fiche montagne Lune" avec différentes méthodes pour mesurer la hauteur d'une montagne sur la Lune.
Un fichier hauteur de rempart.ggb qui permet de faire l'exercice 2c de la fiche précédente.

Dossier Distance de la Lune avec une éclipse
Une fiche "M&A CLEA Lune fiche distance eclipse 031005" pour calculer la distance de la Lune à partir d'une photo de l'éclipse partielle de Soleil du 3 octobre 2005.
Un fichier "Distance de la Lune avec GeoGebra" qui explique comment utiliser GeoGebra pour le calcul de la fiche précédente avec le fichier "Distance de la Lune avec GeoGebra.ggb" correspondant.