



Maths et Astronomie

10. Cadres solaires

SOLUTIONS À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS COMPLÉMENTS POUR L'ENSEIGNANT

Les exercices ne sont pas indépendants ici. L'exercice 2 comme l'exercice 3 demandent à avoir fait l'exercice 1 auparavant et l'exercice 4 est la suite de l'exercice 2.

Voici différentes progressions possibles : 1-2, 1-3, 1-2-4 ou 1 seul (ou encore 1-2-3-4).

SOLUTIONS

Les formules sont notées ici et les résultats sont dans la feuille de calcul M&A CLEA Cadres, adaptables à la latitude choisie.

1. a. 15° . La Terre tournant sur elle-même à vitesse constante en 24 heures, on divise 360° par 24.

b. $\widehat{zOp} = \widehat{OTE}$ (angles correspondants) ; $\widehat{COD} = 90^\circ - \ell$; $\widehat{CDO} = \ell$ (les angles \widehat{OTE} et \widehat{CDO} ont des côtés perpendiculaires deux à deux).

2. a. $\widehat{COD} = 90^\circ - \ell$; $\widehat{CDO} = \ell$.

b. $CO = 10 \sin \ell$.

c. On notera H l'angle horaire du Soleil : $H = \widehat{OCA} = 15^\circ \times 2 = 30^\circ$.

d. $OA = OC \tan \widehat{OCA} = 10 \sin \ell \tan H$ (donc $10 \sin \ell \tan 30^\circ$ ici)

e. $\tan \widehat{ODA} = OA/OD = \sin \ell \tan H$ (donc $\sin \ell \tan 30^\circ$ ici).

f. Elle est perpendiculaire à [CO] car $6 \times 15^\circ = 90^\circ$, donc horizontale et orientée est-ouest.

g. La ligne 6 h du cadran équatorial et la droite (OA) sont parallèles. On peut donc deviner que la ligne 6 h du cadran horizontal sera aussi orientée est-ouest.

Pour être plus précis, il faudrait dire que le Soleil est dans le plan contenant le style [CD] et l'axe est-ouest (donc dans un plan perpendiculaire à [CO]). L'ombre est à l'intersection de ce plan et du cadran horizontal, elle est donc orientée est-ouest.

h. Pour une heure h : $H = \widehat{OCA} = 15 \times h$ en degrés ou $h \times \pi/12$

et $\tan \widehat{ODA} = OA/OD = \sin \ell \tan H = \sin \ell \tan 15 h$ (si les angles sont en degrés et h en heure)

donc $\widehat{ODA} = \arctan (\sin \ell \tan 15 h)$.

Résultats pour une latitude de 47° :

Heure	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Angle OCA ($^\circ$)	90	75	60	45	30	15	0	15	30	45	60	75	90
Angle ODA ($^\circ$)	90	69,9	51,7	36,2	22,9	11,1	0,0	11,1	22,9	36,2	51,7	69,9	90

Remarque : un cadran horizontal peut être gradué avant 6 h et après 18 h. La ligne 5 h par exemple est dans le prolongement de la ligne 17 h sur le cadran équatorial donc sur le cadran horizontal aussi.

3. a. $\widehat{COD} = 90^\circ - \ell$; $\widehat{CDO} = \ell$; $\widehat{CFO} = 90^\circ - \ell$; $\widehat{COF} = \ell$.

b. $CO = 10 \cos \ell$.

c. $H = \widehat{OCA} = 15^\circ \times 2 = 30^\circ$.

d. $OA = OC \tan H = 10 \cos \ell \tan H$ (donc $10 \cos \ell \tan 30^\circ$ ici).

e. $\tan \widehat{OFA} = OA/OF = \cos \ell \tan H$ (donc $\cos \ell \tan 30^\circ$ ici).

f. Elle est perpendiculaire à [CO] car $6 \times 15^\circ = 90^\circ$, donc horizontale et orientée est-ouest.

g. La ligne 6 h du cadran équatorial et la droite (OA) sont parallèles. On peut donc deviner que la ligne 6 h du cadran vertical sera aussi une ligne horizontale orientée est-ouest.

Pour être plus précis, il faudrait dire que le Soleil est dans le plan contenant le style [CF] et l'axe est-ouest (donc dans un plan perpendiculaire à [CO]). L'ombre est à l'intersection de ce plan et du cadran vertical, elle est donc orientée est-ouest.

h. Pour une heure h : $H = \widehat{OCA} = 15 \times h$ en degrés ou $h \times \pi / 12$

et $\tan \widehat{OFA} = OA/OF = \cos \ell \tan H = \cos \ell \tan 15 h$ (si les angles sont en degrés et h en heure)

donc $\widehat{ODA} = \arctan (\cos \ell \tan 15 h)$.

Résultats pour une latitude de 47° :

Heure	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Angle OCA ($^\circ$)	90	75	60	45	30	15	0	15	30	45	60	75	90
Angle OFA ($^\circ$)	90	68,6	49,8	34,3	21,5	10,4	0,0	10,4	21,5	34,3	49,8	68,6	90

4. a. $\widehat{FDO} = \ell$; $\widehat{DFO} = 90^\circ - \ell$.

b. $FO = 10 \tan \ell$.

c. Figure de droite (figure réalisée pour la latitude de 47° avec une déclinaison du plan vertical de 10° ouest).

d. On a : $OD = 10$;

$OA = 10 \sin \ell \tan H$;

$\widehat{AOB} = d$

On cherche OB. Le problème n'est pas si simple. Voici trois méthodes possibles mais il en existe sûrement d'autres.

Méthode analytique

On se place dans un repère du plan par exemple d'origine O et dont les axes suivent [OD) et [OA).

L'équation de (OB) s'écrit alors : $y = x \cotan d$

L'équation de (DA) s'écrit : $y = (-\sin \ell \tan H) x + 10 \sin \ell \tan H$

On détermine l'abscisse du point d'intersection B : $x_B = 10 \sin \ell \tan H / (\cotan d + \sin \ell \tan H)$

puis OB : $OB = x_B / \sin d = 10 \sin \ell \tan H / (\cos d + \sin d \sin \ell \tan H)$

On sait que : $OF = 10 \tan \ell$

On en déduit l'angle \widehat{BFO} (noté H dans la suite), angle formé par la ligne horaire du cadran vertical et (FO), la ligne du midi :

$\tan H' = OB/OF = \cos \ell / (\cos d \cotan H + \sin d \sin \ell)$.

On a fait les calculs pour les heures de l'après-midi d'un cadran vertical déclinant ouest.

Pour les heures du matin, il faudrait changer l'équation de (DA) en : $y = (\sin \ell \tan H) x - 10 \sin \ell \tan H$.

On trouverait alors : $\tan H' = OB/OF = \cos \ell / (\cos d \cotan H - \sin d \sin \ell)$.

Mais il est plus simple de travailler avec des angles orientés :

- l'angle horaire du soleil est pris négatif le matin et positif l'après midi

- la déclinaison du plan du cadran est négative vers l'est et positive vers l'ouest.

Avec ces conditions, la première formule est toujours valable : $\tan H' = OB/OF = \cos \ell / (\cos d \cotan H + \sin d \sin \ell)$.

On peut aussi remarquer qu'à midi, l'angle horaire est nul et 0 n'a pas de cotangente.

Il faut néanmoins faire attention que le Soleil n'est pas forcément du bon côté du plan du cadran et même si les équations ont une solution, il n'y aura pas toujours d'ombre.

Avec la règle des sinus dans le triangle OBA

(1) $OB / \sin A = OA / \sin B$ (B désignant l'angle OBA) ;

$OA = 10 \sin \ell \tan H$

$B = 180^\circ - (d + A)$ donc $\sin B = \sin (d + A) = \sin d \cos A + \cos d \sin A$

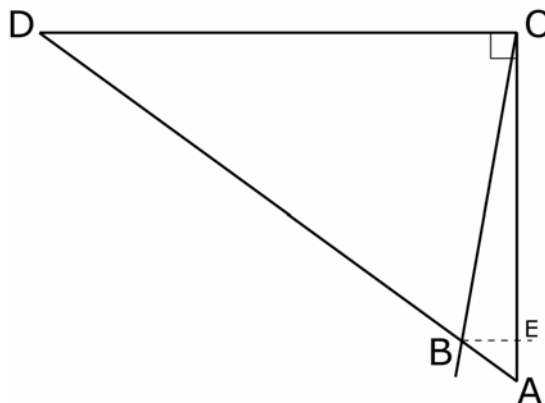
donc la relation (1) peut s'écrire $OB / \sin A = 10 \sin \ell \tan H / (\sin d \cos A + \cos d \sin A)$

En multipliant chaque membre par $\sin A$

$OB = 10 \sin \ell \tan H / (\sin d \cotan A + \cos d)$

En remplaçant $\cotan A$ par $\sin \ell \tan H$, on obtient

$OB = 10 \sin \ell \tan H / (\sin d \sin \ell \tan H + \cos d)$. La suite est identique à la méthode analytique



Avec Thalès

On appelle E la projeté orthogonal de B sur (OA) .

$OB = \frac{OE}{\cos d}$. Pour trouver OB , on cherche OE en fonction de d et de OA .

On sait que : $\tan d = \frac{BE}{OE}$ (1)

D'autre part avec Thalès : $\frac{BE}{OD} = \frac{AE}{AO}$

ce qui peut aussi s'écrire $\frac{BE}{OD} = \frac{AO-OE}{AO}$ ou $\frac{BE}{OD} = 1 - \frac{OE}{OA}$ (2)

On a deux inconnues, BE et OE et deux équations, on devrait donc pouvoir déterminer BE et OE .

L'équation (2) peut se transformer en $\frac{BE}{OE} = OD \times (\frac{1}{OE} - \frac{1}{OA})$

Avec (1), l'égalité devient : $\tan d = OD \times (\frac{1}{OE} - \frac{1}{OA})$.

On en déduit : $\frac{1}{OE} = \frac{\tan d}{OD} + \frac{1}{OA}$ donc $OE = \frac{OD \times OA}{OA \tan d + OD}$

Il reste à calculer OB :

On sait que $OB = \frac{OE}{\cos d}$ donc $OB = \frac{OD \times OA}{OA \times \sin d + OD \times \cos d}$

Avec $OD = 10$ et $OA = 10 \sin l \tan H$, on obtient : $OB = \frac{10 \sin l \tan H}{\sin l \tan H \sin d + \cos d}$, comme précédemment.

Résultats pour une latitude de 47° et une déclinaison du plan de 10° :

Heure	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Angle OCA ($^\circ$)	-90	-75	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45	60	75	90
$\tan OFA$	5,37	-4,98	-1,54	-0,80	-0,43	-0,19	0	0,18	0,37	0,61	0,98	1,74	5,37
Angle OFA ($^\circ$)	79,5	-78,7	-57,1	-38,5	-23,4	-10,9	0	10,2	20,4	31,5	44,4	60,2	79,5

La ligne 6 h est fausse car, à cette heure-là, le Soleil n'éclaire pas le cadran.

Ici, tous les angles ont été calculés mais on peut les tracer par simple construction géométrique à partir d'un cadran équatorial. Même les angles du cadran équatorial (multiples de 15°) peuvent être dessinés à la règle et au compas !

À PROPOS DES DOCUMENTS JOINTS

M&A CLEA 10 CadranS animation.g3w et M&A CLEA 10 CadranS animation.pdf

Une petite simulation de cadran solaire sous Geospace avec le mode d'emploi.

M&A CLEA 10 Cadrans solaires solution

Une feuille de calcul donnant les résultats des exercices, c'est-à-dire les calculs des droites horaires d'un cadran solaire horizontal, vertical plein sud, vertical déclinant pour toute latitude.

M&A CLEA 10 Maquettes de cadrans solaires.pdf

La première maquette permet de construire un cadran solaire équatorial pour la latitude désirée. Pour cela, il suffit de plier le quart de cercle en utilisant la graduation en latitude.

La deuxième maquette est un cadran solaire horizontal tracé pour une latitude de 47° .

M&A CLEA 10 Cadrans solaires.pps

Un diaporama présentant rapidement les cadrans solaires équatoriaux, les cadrans horizontaux et verticaux puis les problèmes d'heure solaire et d'heure légale.

M&A CLEA 10 CadranS graduation equinoxiale.pdf

Construction de la graduation de l'équinoxiale à partir du texte « Construction par une ouverture de compas » par Sainte Marie Magdelaine (1610 ?-1648) dans Horlogiographie.



Les cadrans solaires, notions de base

(d'après un article paru dans le numéro 134 des Cahiers Clairaut)

Le mouvement apparent du Soleil

Au cours de la journée, nous voyons le Soleil tourner autour d'un axe parallèle à l'axe de la Terre, plus ou moins haut dans le ciel suivant la date (voir les Cahiers Clairaut 126 et 129). Ce mouvement apparent, dû à la rotation de la Terre sur elle-même, va nous permettre de nous repérer dans le temps. On définit tout d'abord midi au Soleil comme le moment où le Soleil se trouve dans le plan du méridien, c'est à dire dans le plan vertical nord-sud. Pour partager le jour en 24 heures égales, on suppose le mouvement apparent du Soleil régulier et on partage sa trajectoire apparente en 24 parties (figure 1). Vu de l'extérieur de la Terre, il est midi sur le méridien contenant le Soleil et chaque méridien correspond à une même heure (figure 2). Le midi solaire étant l'origine de l'heure solaire, on devrait le noter 0 h. Nous avons choisi, comme on le fait souvent, de prendre 12 h, plus en rapport avec l'heure légale.

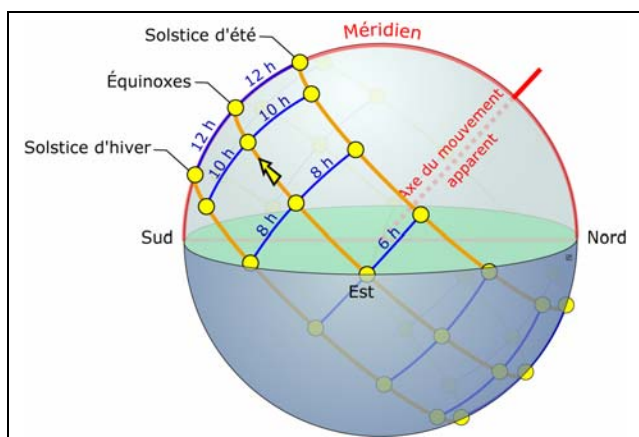


Fig. 1. Heure solaire et mouvement apparent du Soleil. À midi solaire, le Soleil est dans le plan du méridien, plus ou moins haut suivant la saison.

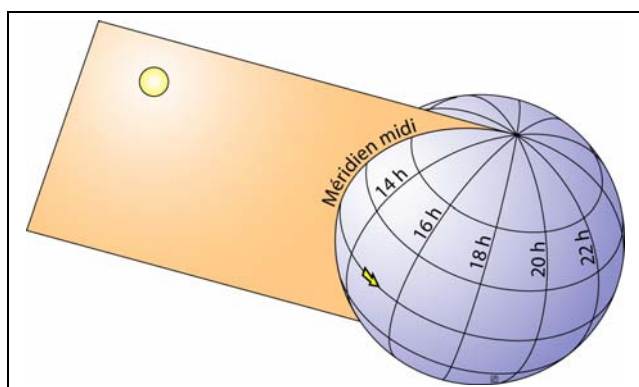


Fig. 2. Heure solaire et rotation de la Terre. Dans le plan du méridien contenant le Soleil, il est midi.

Les méridiennes

Il s'agit du plus simple des cadrans solaires puisqu'une méridienne ne donne l'heure qu'à midi. Elle permettait de venir régler sa montre quand les mécanismes étaient encore peu précis. On observe l'ombre d'un point (ou la tache lumineuse d'un rayon de Soleil ayant traversé un œilleton) sur une surface habituellement verticale ou horizontale. La ligne du midi est l'intersection de la surface et du plan du méridien contenant le point (ou l'œilleton). C'est une ligne horizontale nord-sud pour une méridienne horizontale. La position de l'ombre ou de la tache lumineuse sur la ligne méridienne permet en plus d'obtenir la date.

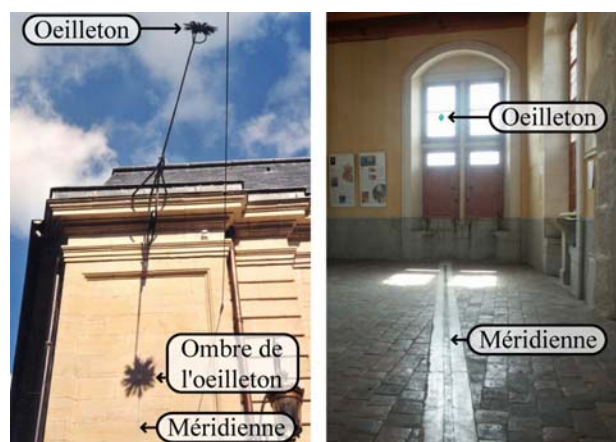


Fig. 3. Méridiennes, verticale à gauche et horizontale à droite (Dijon, Palais des Ducs de Bourgogne)

Gnomon ou style polaire ?

Pour marquer les heures au cours de la journée, on peut imaginer suivre l'ombre d'un bâton vertical, appelé habituellement « gnomon ». Aucun problème à midi quand le Soleil est au sud, l'ombre est au nord. Mais à d'autres heures, la direction de l'ombre n'est pas la même en hiver et en été (figure 4).

Pour que l'ombre du Soleil indique la même heure quelle que soit la saison, il existe deux solutions :

- la première consiste à incliner le bâton qui fait ombre pour qu'il soit parallèle à l'axe de la Terre, qui est aussi l'axe du mouvement apparent du Soleil (figure 5). Dans ce cas-là, on parle de « style polaire » (le style désigne la tige qui fait ombre).
- la deuxième solution consiste à déplacer le style en fonction de la date. Il s'agit du cadran analemmatique (voir CC 134).

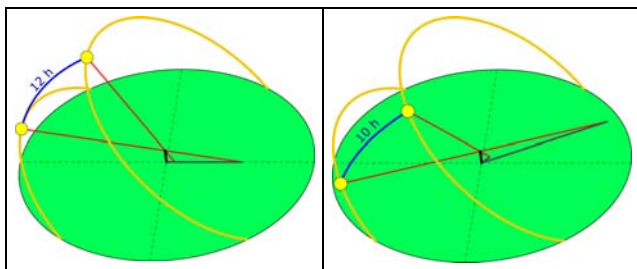


Fig. 4. Ombre d'un gnomon à 12 h et à 10 h. À 12 h, tout se passe dans le plan du méridien et l'ombre est au nord. À 10 h, les positions du Soleil à différentes dates et le gnomon ne sont pas dans le même plan : la direction de l'ombre n'est pas la même en été et en hiver.

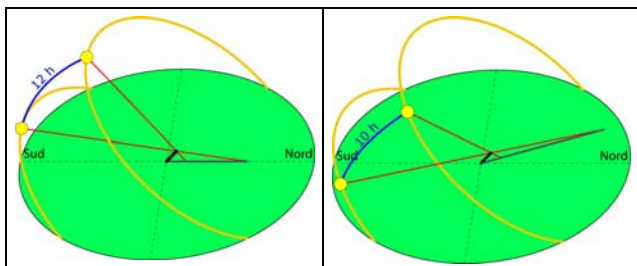


Fig. 5. Ombre d'un style parallèle à l'axe de la Terre à 12 h et à 10 h. À 12 h, Soleil et style sont toujours dans le plan du méridien et l'ombre est au nord. À 10 h, les positions du Soleil et le gnomon sont dans un même plan : on obtient alors une même direction de l'ombre quelle que soit la date, intersection de ce plan et du plan du cadran (plan horizontal ici).

Les cadrans plans à style polaire

Une fois la position du style fixée (style polaire ici), il reste à graduer la table du cadran. Le cadran le plus simple à concevoir est un cadran installé au pôle Nord, avec un style qui suit l'axe de la Terre et une table horizontale. Comme la Terre tourne régulièrement sur elle-même en 24 h¹, il suffit de graduer la table tous les 15° ($360^\circ : 24$) et on obtient un partage du temps en heures égales. Si on transporte ce cadran à une autre latitude, il fonctionnera toujours aussi bien. Ce type de cadran s'appelle cadran équatorial car sa table est parallèle au plan de l'équateur (figure 6).

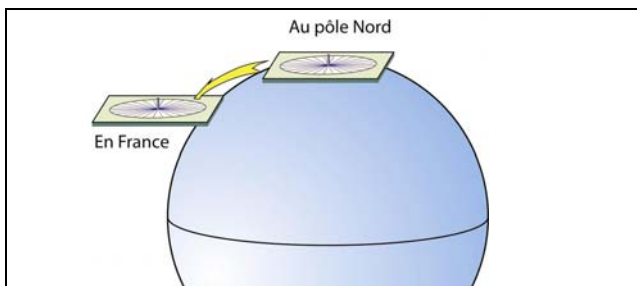


Fig. 6. Cadran équatorial installé au pôle Nord puis transporté à nos latitudes. Le Soleil étant au nord du plan de l'équateur au printemps et en été, on utilise la face supérieure nord du cadran à ces moments-là. Mais la face inférieure doit aussi être graduée pour l'automne et l'hiver.

La table d'un cadran équatorial n'est pas horizontale (sauf aux pôles) ni verticale (sauf à l'équateur).



Fig. 7. Cadran équatorial à Beaune

La réalisation d'un cadran horizontal ou vertical est un peu plus délicate car les angles ne sont pas égaux. Une technique consiste à utiliser un cadran équatorial auxiliaire gradué tous les 15° (figure 8).

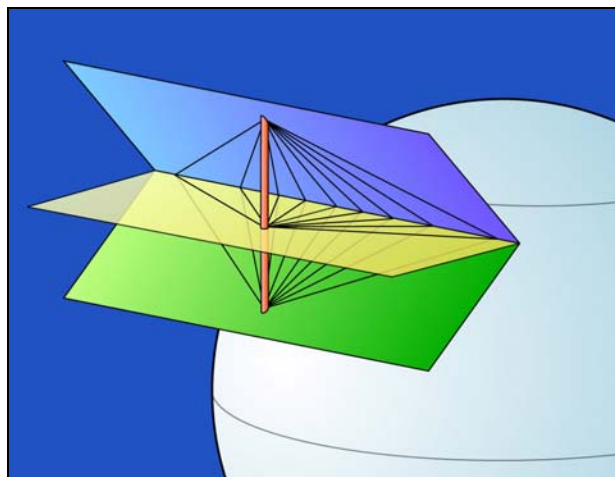


Fig. 8. Passage d'un cadran équatorial (en jaune) à un cadran vertical (en bleu) ou horizontal (en vert). Le style (orange) est toujours parallèle à l'axe de la Terre.

On peut aussi utiliser des formules de trigonométrie ou des logiciels de tracé de cadrans (voir page xxx). Un cadran vertical peut être non déclinant (orienté plein sud), déclinant est ou déclinant ouest. Le calcul du tracé des lignes est alors un peu plus délicat.

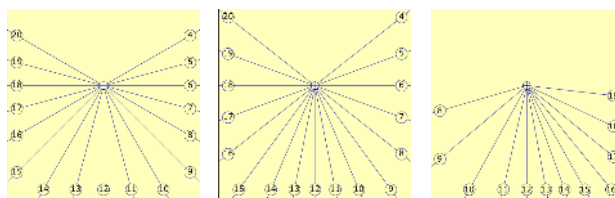


Fig. 9. Lignes horaires pour un cadran équatorial à gauche (angles de 15°), un cadran horizontal au milieu (angles inégaux mais axe de symétrie) et un cadran « déclinant ouest 26° » à droite (angles inégaux sans axe de symétrie). Les trois sont calculés pour une latitude de 47°.

Pour tracer correctement un cadran solaire, il faut connaître sa latitude ainsi que l'orientation du mur pour un cadran vertical. Cette mesure doit être précise pour que le tracé soit juste. La fixation du

¹ La période est donnée ici par rapport à l'axe Terre Soleil.

style parallèle à l'axe de la Terre doit aussi être réalisé avec soin.



Fig. 10. Cadrans vertical déclinant 26° ouest

Les lignes diurnes

Au cours d'une journée, l'ombre de l'extrémité du style (ou d'un autre point particulier du style) suit une trajectoire qui dépend de la date. Ces "lignes diurnes" sont souvent tracées pour les solstices et équinoxes. Pour l'équinoxe, c'est une droite. Pour les autres dates, il s'agit toujours de coniques (hyperbole, parabole ou ellipse) ; à nos latitudes, ce sont des hyperboles si le cadran est horizontal ou vertical (figure 11).

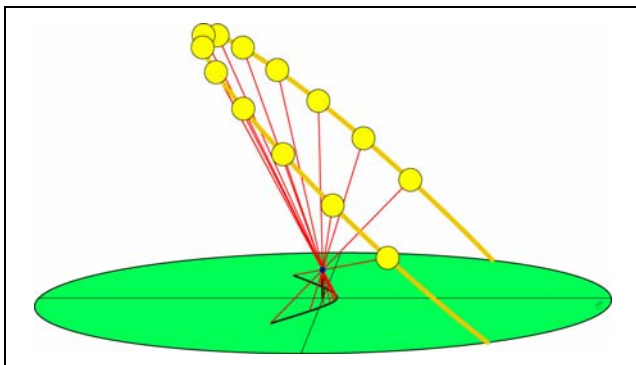


Fig. 11. Les segments rouges, joignant le Soleil du 21 juin au point bleu, engendrent un cône. L'ombre du point bleu suit l'intersection de ce cône avec le plan horizontal ; c'est donc ce qu'on appelle une conique, ici une hyperbole. Aux équinoxes, le Soleil est dans le plan de l'équateur, les lignes rouges sont dans un même plan et la trace de l'ombre du point bleu est une droite (orientée est ouest pour un cadran horizontal).

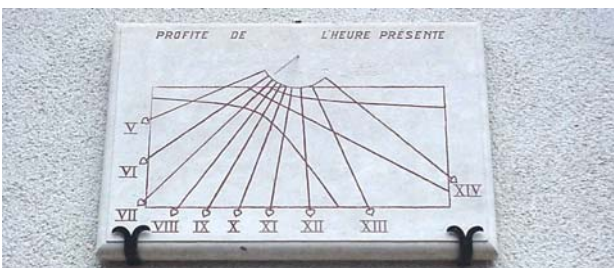


Fig. 12. Cadrans vertical déclinant est, avec lignes diurnes pour les équinoxes (la droite) et les solstices (les deux arcs d'hyperbole).

Les cadrans de hauteur

Au cours de la journée, la hauteur du Soleil varie mais différemment suivant les saisons. Elle peut donc nous donner l'heure à condition de connaître la date. Les cadrans de hauteur sont basés sur ce principe. Le plus connu est la montre de berger. Ce qui est particulièrement intéressant, c'est que l'on n'a pas besoin de connaître le nord pour utiliser ce type de cadran. Par contre, il faut connaître la date.

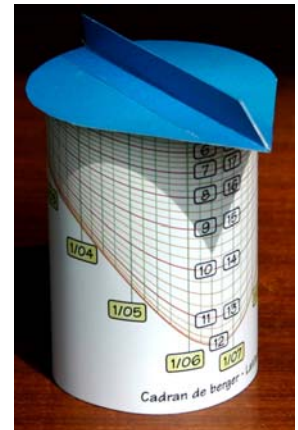


Fig. 13. Montre ou cadran de berger en carton. Il est réglé ici pour le 20 juin, il est 9 h 40 (cadran paru dans le n°118 de la revue Cosinus).

Heure solaire et heure légale

Un cadran solaire donne l'heure solaire. Quand on veut retrouver l'heure de la montre, trois corrections sont à effectuer :

1. Heure d'hiver, heure d'été.
2. Correction en longitude : notre heure légale est réglée sur le méridien de Greenwich. L'heure solaire est en avance si on est à l'est de ce méridien, en retard sinon.
3. L'équation du temps (voir CC 134).

Heure légale et heure solaire

$$HL = HS + \text{décalage en longitude} + \text{EdT} + 1 \text{ ou } 2 \text{ h}$$

HL = heure légale

HS = heure solaire vraie locale (en comptant 12 h pour midi au Soleil).

Décalage en longitude en minutes : il est égal à la longitude en degrés multiplié par 4 (on a un décalage de 24 h pour 360° soit 1 h pour 15° ou 4 min pour 1°). On compte la longitude négative à l'Est de Greenwich et positive à l'Ouest.

EdT = Équation du temps (donnée page xxx)

On ajoute 2 h si on est à l'heure d'été, 1 h sinon.

Autres types de cadrans

La surface graduée n'est pas obligatoirement plane (sphère, cylindre...), on peut intégrer les corrections de longitude et d'équation du temps dans les lignes horaires, on peut observer l'intersection de l'ombre de deux fils... Il existe une multitude de types de cadrans solaires.

